Nombre de compositions d'un entier
Solution du problème des tas

La feuille @ problèmes
Jerôme Germoni

Octobre 2007

On dispose de n objets que l'on peut répartir en autant de tas que l'on souhaite. Quel est le nombre de répartitions possibles ?

Précisons qu'il y a quatre répartitions pour trois objets : 3, 1+2, 2+1, 1+1+1[1].

Préliminaire : compositions

On appelle *composition* une suite finie d'entiers naturels non nuls $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_\ell)$. On appelle ℓ la *longueur* de la composition, et, si $n = i_1 + \cdots + i_\ell$, on dit que $\mathbf{i}$ est une composition de n. On note D_n l'ensemble des compositions de n et d_n le cardinal de D_n.

Il est commode de dire qu'il existe une unique suite de longueur nulle, ce qui amène à poser $d_0 = 1$. Voici une raison abstraite de le faire : une suite finie, c'est un mot ; la concaténation des mots est une opération utile ; il est commode de disposer d'un neutre pour une opération, et la suite vide en est un. On aura une raison plus concrète de poser $d_0 = 1$ plus loin. Pour l'instant, signalons juste que ça ne mange pas de pain !

Compositions : calcul direct On se convainc qu'une composition est déterminée par un certain nombres de séparateurs | placés entre deux points $\bullet$ consécutifs dans une série de n points :

$$\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \cdots \quad \bullet \quad \bullet$$

Par exemple :

$$\bullet \mid \bullet \quad \bullet \quad \bullet \mid \bullet \quad \bullet \qquad 1+3+2=6.$$

En numérotant les espaces disponibles de 1 à $n-1$ où mettre un séparateur, on constate que le nombre de choix pour une composition est le nombre de parties de $\{1, \ldots, n-1\}$, c'est-à-dire 2^{n-1}.

[1] Si on considère que les deux décompositions 1+2 et 2+1 ne doivent pas être distinguées, c'est un autre problème plus difficile

Plus formellement, à toute composition $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_\ell)$, on associe la suite *strictement croissante* dont le dernier terme est n :

$$0 < i_1 < i_1 + i_2 < \cdots < i_1 + \cdots + i_{\ell-1} < i_1 + \cdots + i_\ell = n.$$

Inversement, étant donné une suite finie $0 < j_1 < \cdots < j_{\ell-1} < j_\ell = n$, on reconstruit une composition de n en posant

$$i_1 = j_1, \quad i_2 = j_2 - j_1, \ \ldots, \quad i_{\ell-1} = j_{\ell-1} - j_{\ell-1}, \quad i_\ell = j_\ell - j_{\ell-1}.$$

Or, la donnée d'une suite finie strictement croissante (de longueur ℓ) dont le dernier terme est n, c'est exactement une partie de $\{1, \ldots, n\}$ qui contient n (de cardinal ℓ) , ou, ce qui revient au même, une partie de $\{1, \ldots, n-1\}$ (de cardinal $\ell - 1$). On obtient ainsi :

Proposition *Soit $n \in N$, $n \geq 1$. Le nombre de compositions de n est 2^{n-1}. Pour $\ell \geq 1$, le nombre de compositions de n en ℓ parts est $\binom{n-1}{\ell-1}$.*

Remarquons que les deux assertions sont compatibles, au sens où

$$\sum_{\ell=1}^{n} \binom{n-1}{\ell-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1}.$$

(Le lien entre les deux présentations est le suivant : le $k$ème séparateur est placé après le point numéroté j_k, et i_k est le nombre de points entre le $(k-1)$ème séparateur et le $k$ème séparateur.)

Compositions : approche par récurrence

On considère l'application

$$\begin{array}{rccll} f: & D_n & \longrightarrow & \{1, \ldots, n\} & \\ & \mathbf{i} & \longmapsto & i_1 & \quad \text{si } \mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_\ell). \end{array}$$

On en déduit immédiatement :

$$d_n = \sum_{p=1}^{n} \text{card } f^{-1}(p),$$

où $f^{-1}(p)$ est l'ensemble des compositions de n dont la première partie vaut p. Or, la donnée d'une composition $(i_1, \ldots, i_\ell)$ de n dont la première partie est $i_1 = p$, c'est la donnée d'une partition $(i_2, \ldots, i_\ell)$ de $n - p$. (Si $i_1 = n$, on doit avoir une composition de 0, et c'est ici qu'il est commode de dire qu'il y en a exactement une, la suite vide ...) En formule : card $f^{-1}(p) = d_{n-p}$. Ainsi :

$$d_n = \sum_{p=1}^{n} d_{n-p} = \sum_{i=0}^{n-1} d_i.$$

Supposant que $n \geq 2$, on écrit :

$$d_n = d_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} d_i = d_{n-1} + d_{n-1} = 2d_{n-1}.$$

Connaissant $d_0 = d_1 = 1$, on en déduit immédiatement : $d_n = 2^{n-1}$ pour tout $n \geq 2$.