Extrait de la brochure
Mathématiques : approche par des textes historiques
Brochure 61, janvier 1986

IREM Paris VII

chapitre 7

Le problème des partis de PACIOLI à PASCAL et FERMAT 1494-1654

Adaptations - résumés

II. LES DIFFERENTES SOLUTIONS AU PROBLEME DES PARTIS
EXPERIMENTATION EN TERMINALE D

1. PRESENTATION DES ADAPTATIONS-RESUMES

A mi-chemin entre les textes historiques et leurs traductions en langage moderne (voire formalisé), les textes qui suivent peuvent apparaître comme un compromis discutable et dangereux, susceptible d'entretenir la trop fréquente supercherie qui consiste à prétendre faire de l'histoire des mathématiques sans étudier les textes sources (en se contentant de "renseignements de seconde main").

Cependant, ils ont été rédigés dans un but bien précis, et suivant une démarche dont il convient sans doute de dire quelques mots afin, non seulement de se justifier, mais également de prévenir les malentendus éventuels :

* Précisons, tout d'abord, qu'ils ont été élaborés et expérimentés dans le cadre d'une recherche (25) dans laquelle la dimension historique des mathématiques, sans être marginale, y était néanmoins secondaire. Davantage : le bon déroulement de l'expérimentation elle-même exigeait l'occultation momentanée de la nature historique des solutions proposées aux élèves (cf. le "scénario" exposé un peu plus loin). Elles furent donc présentées comme "solutions d'autres élèves" (d'où la dénomination par prénoms francisés).

Le passage par l'intermédiaire de ces "adaptations-résumés" nous semblait en effet être un stratagème indispensable pour que soient prises en compte, de manière équivalente pour les élèves, leurs propres solutions et les solutions historiques ; c'est-à-dire afin que ne s'introduisent pas d'artefacts du type : "un mathématicien a toujours raison", "la solution la plus récente est certainement la bonne"... dans les raisonnements des élèves.

* Si nous pensons d'autre part que, malgré son caractère singulier, l'utilisation de tels textes a sa place dans cette brochure, c'est que, par delà l'emploi du "stratagème" évoqué ci-dessus (et sans doute grâce à lui), ces textes "fabriqués" constituent une sensibilisation possible (et "efficace" d'après nos observations) à "l'histoire" du problème des partis, et donc aux textes historiques eux-mêmes. Elle suit en cela la démarche commune à toutes les propositions de la brochure, les solutions proposées sous cette forme faisant alors office d'exercices d'introduction.

* Enfin, il faut souligner que, sans être, bien évidemment, des traductions littérales des textes historiques, ces "adaptations" furent rédigées, à chaque fois, à partir du texte original, et avec pour souci constant le respect de l'esprit du texte, c'est-à-dire de la démarche de l'auteur.

Sans prétendre y être parfaitement arrivés (nous avons notamment souligné, dans la présentation, nos difficultés en ce qui concerne CARDAN), nous pensons néanmoins avoir sauvegardé la spécificité, le "style" de chaque solution, et par conséquent ce qui fait l'intérêt de leur confrontation.

Sans doute ne faut-il jamais oublier qu'il y a un moment où le résumé appauvrit définitivement, où le changement de langage trahit irrémédiablement. Mais c'est précisément cela qu'une analyse rigoureuse des textes originaux et un travail précis de rédaction doivent permettre d'éviter.

Rester fidèle aux textes, dissimuler un moment leur origine historique et, dans le même temps, être suffisamment clair pour permettre aux élèves "l'accès" aux textes originaux plus complexes, tels furent les objectifs et le rôle de ces "adaptations-résumés". Ce n'est que dans ce cadre qu'ils peuvent apparaître légitimes et adéquats.

AUTEURS ET SOURCES DES SOLUTIONS PROPOSEES

XAVIER et YANN : X et Y, auteurs inconnus, solutions rapportées et critiquées par Luca PACIOLI.

LUC : Luca PACIOLI (1445-1514).
Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita, 1ère édition, Venise, 1494.

NICOLAS : Niccolo TARTAGLIA (1500-1557).
La prima parte del general trattato di numeri e misure, 1556.

JEROME : Jérome CARDAN (1501-1576).
Pratica arithmética et mensurandi singularis, 1539.

LAURENT : Lorenzo FORESTANI.
Pratica d'aritmética e géométria, 1ère édition, 1603.

PASCAL : Blaise PASCAL (1623-1662).
Troisième usage du triangle arithmétique, 1665.
Correspondance avec Fermat, 1654-1660.

PIERRE : Pierre de FERMAT (1601-1665).
Correspondance avec Pascal, 1654-1660.

GILLES : Gilles Personne de ROBERVAL (1602-1675).

2. ADAPTATIONS-RESUMES

T0. PROBLEME.

Ariane et Bernard jouent à un jeu qui consiste en plusieurs parties de "pile ou face".

Chaque partie rapporte 1 point à celui qui la gagne.

Le premier qui a 8 points (c'est-à-dire qui a gagné 8 parties) est le vainqueur du jeu, et il gagne 84 francs (on appelle cette somme : la mise).

Seulement, Ariane et Bernard sont obligés de s'arrêter avant d'avoir pu terminer le jeu.

Quand ils s'arrêtent, Ariane a gagné 7 parties (elle a donc 7 points), et Bernard 5 parties (il a donc 5 points).

Avant de se séparer, ils veulent se partager la mise puisque personne ne l'a complètement gagnée (aucun d'eux n'a 8 points).

Mais alors, comment partager la mise, c'est-à-dire que donner à Ariane et que donner à Bernard pour que le partage soit juste ?

Quel partage proposez-vous, et pourquoi ?

Rappel de la situation :

Le vainqueur est celui qui obtient le premier 8 points.

Quand ils s'arrêtent de jouer : Ariane a 7 points,
Bernard a 5 points.

La mise totale est de 84 francs.

Question supplémentaire :

Quel partage proposeriez-vous, et pourquoi, si la situation, pour le même jeu, était la suivante :

Le vainqueur est celui qui obtient le premier 8 points.

Quand ils s'arrêtent de jouer : Ariane a 7 points,
Bernard a 0 point.

La mise est toujours de 84 francs.

T1. SOLUTION DE XAVIER.

Revenons en arrière, et ôtons 2 points à chaque joueur, de sorte qu' Ariane a 5 points et Bernard 3 points.

Puisque $5 + 3 = 8$ et que 8 points font gagner 84F , alors Ariane, qui a 5 points, doit emporter $\frac{5}{8} \times 84F = 52{,}50F$, et Bernard ayant 3 points doit avoir, quant à lui, $\frac{3}{8} \times 84F = 31{,}50F$.

Donc la mise se partagera en :

52,50F pour Ariane ,
31,50F pour Bernard .

T2. SOLUTION DE YANN.

Revenons en arrière, et ôtons 5 points à chaque joueur, de sorte qu' Ariane n'a plus que 2 points et Bernard 0 point.

Puisque 2 est le quart de 8 , on peut dire qu' Ariane a déjà le quart du jeu, donc elle doit déjà prendre le quart de 84F , c'est-à-dire 21F .

Le reste de la mise ($84 - 21 = 63$) doit être partagé également entre les deux joueurs. Ce qui fera donc pour chacun 31,50F .

Donc la mise se partagera en :

$21F + 31{,}50F = 52{,}50F$ pour Ariane ,
31,50F pour Bernard .

T3. LUC CRITIQUE LA SOLUTION DE XAVIER.

On ne doit pas faire comme Xavier pour partager la mise. Car, si on ôte deux points à Ariane, qui en a 7 , cela veut dire qu'on lui retire $\frac{2}{7}$ de ses points. Tandis qu'en ôtant 2 points à Bernard, on lui retire $\frac{2}{5}$ de ses points.

Or $\frac{2}{5} > \frac{2}{7}$. Proportionnellement, on a donc retiré plus à Bernard qu'à Ariane. C'est-à-dire qu'on a retiré une plus grosse partie de ses points à Bernard qu'à Ariane. Et cela n'est pas juste.

T4. LUC CRITIQUE LA SOLUTION DE YANN.

La solution de Yann n'est pas bonne. Car, en ôtant 5 points à Ariane, on lui a retiré $\frac{5}{7}$ de ses points (car elle en avait 7). Tandis qu'en ôtant 5 points à Bernard, on lui a <u>tout</u> retiré.

Proportionnellement, on a donc plus retiré à Bernard qu'à Ariane. Et cela n'est pas juste.

T5. SOLUTION DE LUC.

Voici ma solution :

Les joueurs ont à eux deux 12 points. On peut donc dire qu'Ariane a $\frac{7}{12}$ de tous les points, et que Bernard a $\frac{5}{12}$ de tous les points.

Il faut donc partager la mise suivant cette proportion : $\frac{7}{12}$ de la mise pour Ariane, et $\frac{5}{12}$ de la mise pour Bernard.

Donc la mise se partagera en :

$\frac{7}{12} \times 84F = 49F$ pour Ariane ,

$\frac{5}{12} \times 84F = 35F$ pour Bernard .

T6. NICOLAS CRITIQUE LA SOLUTION DE LUC.

La règle de Luc n'est ni bonne, ni belle. Car, si Ariane avait un seul point et Bernard zéro point, et si l'on appliquait la règle de Luc, alors Ariane devrait recevoir toute la mise et Bernard rien du tout !!

Ce ne serait pas juste que, pour un seul point (alors qu'il en faut 8 pour gagner), Ariane doive retirer toute la mise en ne laissant rien à Bernard.

T7. SOLUTION DE NICOLAS.

Quelle que soit la solution qu'on propose, on trouvera toujours moyen de la discuter. Je propose quand même ma solution qui me parait être la moins discutable.

Si la mise est de 84F , on peut dire que chaque joueur a misé 42F .

Ariane, qui a le plus de points, doit déjà récupérer sa mise (42F) . Mais, puisqu'elle a 2 points de plus que Bernard et que 2 points représentent le quart du jeu, Ariane doit prendre aussi le quart de la mise de Bernard (c'est-à-dire 42F divisé par 4), ce qui est égal à 10,50F .

Donc la mise se partagera en :

42F + 10,50F = 52,50F pour Ariane ,

84F − 52,50F = 31,50F pour Bernard .

T8. SOLUTION DE LAURENT.

Je pense aussi que Luc se trompe. Car il faut tenir compte de la chance qui peut se retourner rapidement et favoriser Bernard d'un seul coup.

Si la partie se gagne en 8 points, les deux joueurs peuvent jouer au maximum 15 parties. Or Ariane en a gagné 7 et Bernard 5 , ce qui fait 12 parties en tout. Il pourrait donc encore y avoir 3 parties et, sur ces parties là, on ne peut rien décider.

Il faut donc faire ainsi :

- Ariane a gagné 7 parties, donc elle doit prendre $\frac{7}{15}$ de la mise, c'est-à-dire 39,20F .

- Bernard avec ses 5 parties doit prendre les $\frac{5}{15}$ de la mise, c'est-à-dire 28F .

- Il reste $\frac{3}{15}$ de la mise qui correspondent aux 3 parties qui pourraient avoir lieu s'ils continuaient de jouer. On ne sait rien de ces parties. Il faut donc diviser en deux parts égales ces $\frac{3}{15}$ de la mise qui représentent 16,80F . Il faut donc donner en plus à chacun 8,40F .

Donc la mise se partagera en :

39,20F + 8,40F = 47,60F pour Ariane ,
28F + 8,40F = 36,40F pour Bernard .

9. JERÔME CRITIQUE LA SOLUTION DE LUC.

Je veux d'abord dire que la solution de Luc est absurde. Il fait une erreur que même un petit enfant pourrait reconnaître. Voici laquelle :

Dans la solution de Luc, Ariane emporte 49F et Bernard 35F . Autrement dit, si on considère qu'ils ont chacun misé 42F , cela veut dire que Ariane a gagné 7F sur l'argent de Bernard.

Or la somme de 7F représente seulement $\frac{1}{6}$ de la mise de Bernard, alors qu'il ne reste plus qu'une seule partie à gagner pour Ariane, tandis que Bernard doit encore en gagner 3 , c'est-à-dire 3 fois plus !!

On voit qu'Ariane ne gagne pas assez sur l'argent de Bernard. Ce partage est injuste.

Mais regardons encore un autre exemple où la solution de Luc n'est pas bonne :

Si Ariane avait 7 points et Bernard 0 point, alors, d'après la solution de Luc, Ariane devrait prendre toute la mise et Bernard rien du tout.

Mais alors, ce serait faire comme si Ariane avait gagné le jeu, comme si elle avait 8 points, comme si la dernière partie n'avait pas d'importance. Cela ne serait pas juste.

10. SOLUTION DE JERÔME.

Voici ma solution :

Pour trouver le bon partage, il faut seulement regarder ce qu'il manque à chaque joueur pour gagner : il manque 1 partie à Ariane et 3 parties à Bernard.

Il faut donc 1 hasard à Ariane pour qu'elle gagne la partie qui lui manque.

Il faut 1 hasard à Bernard pour qu'il gagne la première partie nécessaire, 2 hasards pour qu'il gagne la seconde, et 3 hasards pour gagner la troisième et enfin gagner le jeu.

Il faut donc 1 hasard pour Ariane et 1 + 2 + 3 , soit 6 hasards pour Bernard.

Donc Ariane doit avoir 6 fois plus de chances de gagner que Bernard, et elle doit emporter 6 fois plus.

Donc la mise se partagera en :

$$\frac{6}{7} \times 84F = 72F \quad \text{pour Ariane} \ .$$

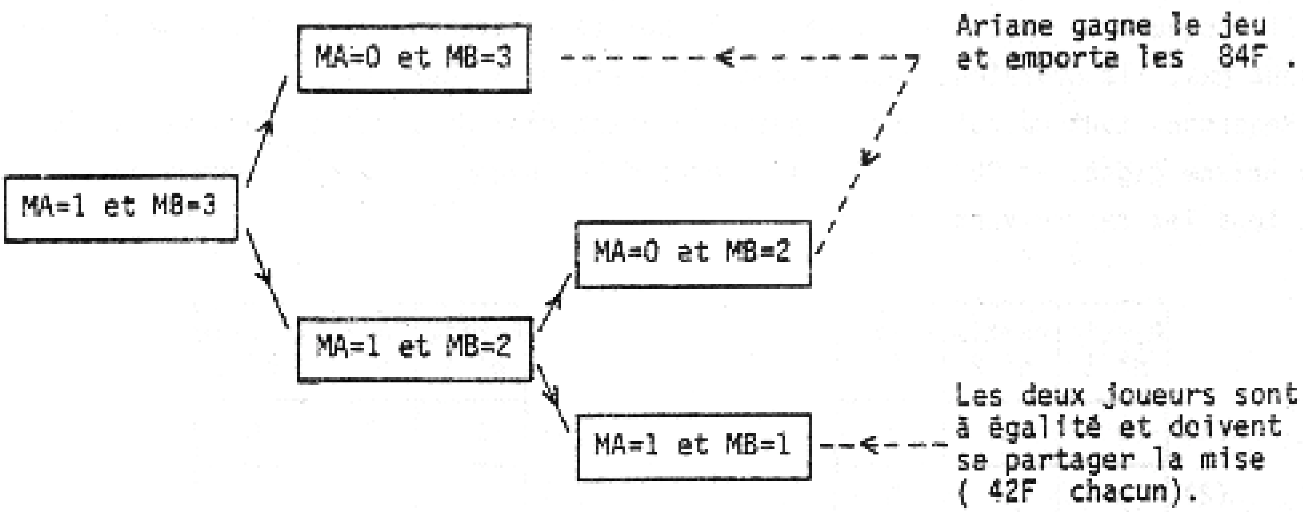
$$\frac{1}{7} \times 84F = 12F \quad \text{pour Bernard} \ .$$

T11. SOLUTION DE PASCAL.

Ce qui est important, c'est ce qu'il manque à chaque joueur pour gagner (1 point pour Ariane et 3 points pour Bernard), et ce qui pourrait se passer s'ils continuaient à jouer.

Par exemple : Si Ariane gagne la partie d'après, il lui manquera 0 point et elle aura gagné le jeu, mais si c'est Bernard qui gagne, il ne lui manquera plus que 2 points (et il manquera toujours 1 point à Ariane).

Pour imaginer tout ce qui pourrait se passer dans les parties qui suivraient s'ils ne s'arrêtaient pas de jouer, je représente cela sous forme d'un "arbre" (où MA désigne ce qui manque à Ariane, et MB ce qui manque à Bernard) :



Ensuite, voilà comment ils se partagent la mise. Ariane dit à Bernard :

"Imaginons qu'il me manque 1 point et toi 2 points. A la partie suivante :

- Si c'est moi qui gagne, il me manquera 0 point et j'aurai gagné le jeu. Donc je devrai prendre toute la mise : 84F .

- Mais si c'est toi qui gagne, il nous manquera à chacun 1 point. Nous devrons donc partager la mise en deux parts égales : 42F pour chacun.

Or nous avons chacun une chance sur deux de gagner cette partie. Je suis donc sûre de gagner au moins 42F , et pour les autres 42F , j'ai une chance sur deux de les gagner.

Donc, s'il me manque 1 point et toi 2 , je dois prendre 42F $+ \frac{1}{2} \times$ 42F = 63F . Et toi, tu prendras le reste : 21F .

Mais, en fait, il me manque 1 point et toi 3 points. Il faut donc remonter encore en arrière :

Si je gagne la prochaine partie, je gagnerai 84F , et si je la perds, il me manquera toujours 1 point, et toi il ne t'en manquera plus que 2 . Or je viens de te montrer que, dans ce cas, je dois prendre 63F et toi 21F . Je suis donc sûre de gagner 63F , et j'ai une chance sur deux de gagner le reste, c'est-à-dire 84F - 63F = 21F .

Donc je dois recevoir, avant de jouer cette partie et si on décide de s'arrêter : 63F $+ \frac{1}{2} \times$ 21F = 73,50F ."

Donc la mise se partagera en :

73,50F pour Ariane ,
10,50F pour Bernard .

T12. SOLUTION DE PIERRE.

Il manquera 1 point à Ariane et 3 points à Bernard. Donc, s'ils ne s'arrêtaient pas, ils devraient encore jouer au maximum 3 parties.

Regardons tout ce qui peut se passer pendant ces 3 parties. Je note "a" lorsque Ariane gagne, et "b" quand c'est Bernard qui gagne. On a alors comme possibilités tous les cas suivants :

	Partie n° 1	Partie n° 2	Partie n° 3
(1)	a	a	a
(2)	a	a	b
(3)	a	b	a
(4)	b	a	a

	Partie n° 1	Partie n° 2	Partie n° 3
(5)	a	b	b
(6)	b	b	a
(7)	b	a	b
(8)	b	b	b

Il y a 8 cas (en fait 2^3), et sur ces 8 cas, il y en a 7 où Ariane gagne (les sept premiers dans le tableau), et 1 seul où c'est Bernard.

Il faut donc qu'Ariane emporte une partie de la mise 7 fois plus importante que celle de Bernard.

Donc la mise se partagera en :

$$\frac{7}{8} \times 84F = 73{,}50F \quad \text{pour Ariane} \quad ,$$

$$\frac{1}{8} \times 84F = 10{,}50F \quad \text{pour Bernard} \quad .$$

T13. <u>OBJECTION DE GILLES.</u>

Pierre a tort de faire la répartition de la mise en supposant que Ariane et Bernard jouent encore 3 parties.

Car, s'il manque 1 partie à Ariane et 3 à Bernard, il n'est pas nécessaire qu'ils jouent 3 parties pour terminer. Il peut arriver qu'ils n'en jouent que 1 ou 2 .

Alors, je ne vois pas pourquoi Pierre prétend faire la répartition de la mise en suivant une règle imaginaire (à savoir qu'ils jouent en 3 parties), car la règle naturelle du jeu est qu'ils s'arrêtent de jouer dès que l'un des deux a gagné. Ce qui n'est pas le cas dans le tableau de Pierre (sauf pour les lignes (6) et (8)).

Ce que fait Pierre n'est peut-être pas faux, mais, en tout cas, cela n'est pas démontré. Il risque donc d'y avoir une erreur dans le raisonnement.