Extrait de la brochure
**Mathématiques : approche par des textes historiques**
Brochure 61, janvier 1986

IREM Paris VII

# chapitre 7

# Le problème des partis de PACIOLI à PASCAL et FERMAT 1494-1654

## Présentation historique

Deux joueurs jouent à "un jeu de pur hasard", et le premier qui aura gagné un nombre déterminé de parties sera déclaré vainqueur. Mais voilà qu'ils doivent "quitter le jeu" avant qu'aucun des deux joueurs n'ait atteint le nombre de parties entraînant la victoire. Comment doivent-ils alors, en se séparant, partager "l'argent qu'ils ont mis au jeu" ?

Tel est le célèbre "problème des partis" (1) qui doit son nom à Pascal, lequel traita de cette "juste distribution" dans sa correspondance avec Fermat et dans le troisième "usage" du <u>Traité du Triangle Arithmétique</u> (2), ceci en 1654, accomplissant par là même les premiers pas du calcul des probabilités.

Mais l'admirable échange que représente cette correspondance, ainsi que la clarté du "troisième usage", ont trop souvent conduit les commentateurs à rejeter dans l'ombre, ou tout au moins au musée des "curiosités" et des "erreurs grossières", les solutions du même problème proposées par des auteurs du XVI$^{\text{ème}}$ siècle.

Or, si au contraire, nous prenons la peine de nous arrêter un moment sur ces premières tentatives, nous découvrons un "matériau" d'une réelle richesse, tant pour l'historien que pour l'enseignant de mathématiques, comme nous allons tenter de le montrer.

Assurément, il y a une "histoire" du problème des partis, ou, plus exactement, un ensemble de textes (souvent assez courts) qui, lorsqu'on les rapproche, permettent à l'analyse de saisir toute une "dynamique" entre les solutions proposées et les critiques de certaines d'entre elles, tout un cheminement dans la compréhension du problème. Et c'est bien cette dynamique, ce cheminement, qui constituent, à nos yeux, l'aspect le plus original et le principal intérêt d'un tel corpus de textes dans la perspective de son utilisation avec des élèves.

## I. <u>PRESENTATION HISTORIQUE</u>

Avant de rendre compte de quelques exemples d'utilisation de ces textes dans des classes, il nous faut les présenter historiquement. Précisons qu'il s'agit bien uniquement, pour des questions de place, d'une "présentation", et non pas d'une analyse historique. Pour une étude plus approfondie, nous renvoyons à l'article très documenté d'E. COUMET (3) (cf. bibliographie [3]). Répétons, d'autre part, que ce qui nous intéresse ici se situe moins dans l'étude de chaque texte que dans ce que l'on peut tirer de leur rapprochement, voire leur confrontation.

Indiquons enfin, pour être tout à fait clair, que nous ferons référence, dans cette présentation, à deux types de textes :

1°) Des "adaptations-résumés" écrits à partir des textes originaux, et qui constituent ce qui a été proposé aux élèves dans un premier temps. Nous en justifierons l'emploi un peu plus loin (cf. p.*109*). Ils seront désignés par la numérotation (T1), (T2), (T3), ...

2° Les textes originaux eux-mêmes, sans lesquels on ne peut prétendre, de notre point de vue, faire réellement de l'histoire des mathématiques. Ils sont situés en annexes, et désignés par (AI), (AII), (AIII), ...

1) PACIOLI.

C'est dans la Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalita, dont la première édition parut en 1494 à Venise, que Luca PACIOLI aborde, de manière d'ailleurs fort marginale, le problème des partis (AI).

Le problème étudié par le mathématicien italien est le suivant :

> *Une brigade joue à la paume. Il faut 60 pour gagner, et chaque coup vaut 10 . L'enjeu est de 10 ducats. Un incident survient qui force les soldats à interrompre la partie commencée, alors que le premier camp a gagné 50 , et le second 20 . On demande quelle part de l'enjeu revient à chaque camp* (cité d'après [5]).

Il fait partie d'une section intitulée *De Militaribus*, et se trouve après le problème suivant (également dans (AI)) :

> *Une brigade de 3 000 hommes fait sur l'ennemi un sac qui lui rapporte 7 876 ducats. On demande combien revient à chaque homme, en supposant que le capitaine touche dix pour cent* (cité d'après [5]).

On peut se demander ce qui autorise PACIOLI à regrouper dans une même section ces deux textes qui représentent pour nous deux problèmes radicalement différents : si le premier, que nous avons cité, correspond bien à la situation du problème des partis, le second, en revanche, n'est à nos yeux qu'un simple problème de proportionnalité. Assurément, l'identité des contextes anecdotiques, si elle justifie le titre de la section, ne donne pas les raisons de sa constitution.

La réponse à cette question se situe dans la solution même de l'auteur. En effet, c'est à l'aide de la *Règle de compagnie* (à peu près notre "règle de trois"), "une des règles les plus fondamentales de l'arithmétique commerciale" ([3], p. 250), qu'il résout ces deux problèmes dont le rapprochement s'explique alors : il s'agit, dans les deux cas, de prendre une décision pratique à l'aide d'un "outil" pratique.

Dès lors, la solution de PACIOLI au problème des partis ne pose pas de problème de compréhension (4) : les deux camps ont déjà obtenu 70 points qui correspondent à l'enjeu de 10 ducats. Le premier camp aura donc 5/7 de 10 ducats, et le second les 2/7 restants (cf. (T5)).

Comme le dit fort justement E. COUMET, la démarche de PACIOLI se caractérise par le fait que "les points acquis constituent en quelque sorte un bien, un *acquis*, d'après lequel doit s'effectuer le partage. Ce qui compte, c'est ce qui a été joué et gagné" ([3], p. 250).

C'est en s'appuyant sur cette argumentation, et aussi sur le sentiment très fort qu'il avait d'avoir découvert la "voie droite" (5), que PACIOLI va rejeter deux autres modes de répartition (d'ailleurs équivalents entre eux) sur lesquels il ne nous livre que peu de chose (nous ignorons, en particulier, quels en sont les auteurs). Nous nous contentons pour ces deux solutions et leurs critiques par PACIOLI de renvoyer aux "résumés" (T1), (T2), (T3), (T4).

2) TARTAGLIA.

C'est dans un tout autre état d'esprit, fort éloigné de ce sentiment de certitude, que Niccolo TARTAGLIA aborde le problème des partis (6). Il écrit, en effet : "la résolution d'une telle question est davantage d'ordre judiciaire que rationnel, et de quelque manière qu'on veuille la résoudre, on y trouvera toujours sujet à litiges" (AII), allant jusqu'à refuser d'écrire plus longuement sur le sujet en disant que "parce que de telles questions sont matière à litiges et de peu d'intérêt, il ne faut pas en tenir compte" (AII).

Il s'agit donc pour lui de proposer la solution "la moins litigieuse" à ses yeux, et par conséquent de montrer, dans un premier temps, que la solution de PACIOLI est inacceptable.

L'argument qu'il emploie consiste à appliquer la méthode de son prédécesseur dans le cas où l'un des deux camps n'a gagné aucune partie :

> *Sa règle ne me paraît, ni bonne, ni belle, parce que, s'il arrive que un parti ait 10 (points) et l'autre rien, et qu'on procédât selon sa règle, le premier devrait tirer le tout et le second rien ; ce serait tout à fait déraisonnable que pour 10 il doive tirer le tout* ((AII), voir aussi (T6)).

Il s'agit donc bel et bien d'un contre-exemple, ce qui déjà ne manque pas d'intérêt. Mais l'étude de la solution même de TARTAGLIA est également riche d'enseignement.

Après avoir critiqué PACIOLI, il est légitime que son souci essentiel soit d'éviter les partages déraisonnables qu'il vient de relever. On peut alors penser que c'est en réfléchissant précisément sur les raisons qui rendent "efficace" le contre-exemple qu'il vient d'exhiber, que TARTAGLIA s'attachera à considérer, non plus seulement les points obtenus par chaque joueur, mais surtout l'écart entre ceux-ci. Et c'est bien ce qui caractérise sa solution (T7).

Il faut encore remarquer que cette solution est en fin de compte équivalente à celles que PACIOLI avait rejetées précédemment, non sans pertinence. On peut donc s'étonner que TARTAGLIA, qui a lu PACIOLI, n'ait pas reconnu dans la critique de celui-ci une réfutation "par avance" de sa propre solution.

Pour comprendre cela, il faut sans doute d'abord noter que "les différences de présentations devaient suffire à masquer cette similitude" ([3], p. 255) ; mais, n'est-il pas possible de penser également que s'affirme ici, dans cette régression apparente, le caractère particulier du "débat" autour de ce problème, à cette époque. Cela mériterait d'être explicité davantage (7), mais disons simplement que nous sommes ici en présence d'un niveau de rationnalité (peut-être faudrait-il risquer de dire "un niveau de mathématisation du problème") qui tient davantage de l'argumentation que de la démonstration. Et ce n'est pas là le moindre intérêt de cette étude simultanée des textes de PACIOLI et de TARTAGLIA.

3) <u>FORESTANI</u>.

Lorenzo FORESTANI (8) rejette également la solution de PACIOLI, mais pour des raisons d'un tout autre ordre que celles de TARTAGLIA. Ce qui est au coeur de son argumentation, c'est la notion de "Fortune" : puisque le sort peut favoriser n'importe lequel des deux joueurs, il faut partager équitablement (en deux parts égales) ce qui dépendrait de lui s'ils continuaient à jouer (9).

De là le calcul de FORESTANI qui débute par la recherche du maximum de jeux que peuvent faire les deux joueurs, puis établit un mode de répartition qui tient effectivement compte (contrairement à PACIOLI, cf. note 4) de ce maximum.

Pour le reste, cette solution ne présente, elle aussi, aucune difficulté. Le partage proportionnel est rapporté à ce nombre maximum de parties, et ce qui resterait à jouer (c'est-à-dire ce qui n'a pas été acquis) est partagé en deux, puisque l'on ne peut rien dire de sûr à son sujet (cf. (T8)).

Citons, pour en terminer avec FORESTANI, un passage de son texte qui résume parfaitement sa position :

> *La raison que quelques-uns allèguent à l'opposé est la suivante : ils disent que celui qui a davantage de jeux est plus près de pouvoir finir et d'obtenir le tout ; aussi convient-il qu'il retire une partie de ces deniers au prorata des jeux gagnés.*
>
> *Et nous nous disons que la fortune peut se retourner rapidement et favoriser l'autre à gagner le tout, comme on l'a vu et comme on le voit un nombre infini de fois, aussi bien dans le jeu de la balle que dans tout autre, mais principalement dans les choses de la guerre... ainsi que l'a doctement montré l'Arioste en la personne de Charles dans ces deux vers :*
>
> Ainsi la Fortune sourit-elle à Agramant
> Qui devint de nouveau, de Charles l'assiégant (10).

*Charles ayant en effet assiégé Agramant, la Fortune se retourna à un tel point qu'Agramant mit en déroute en un instant l'armée de Charles, et l'assiégea une nouvelle fois dans Paris.*

4) CARDAN.

Le dernier chapitre de la pratica arithmética et mesurandi singularis (11) est intitulé *De erroribus fratris Lucae in arithmetica* (cf. (AIV)).

Parmi ces erreurs de PAÇIOLI, il y a pour CARDAN les "absurdités" *(absurdissimum)* auxquelles conduit le partage que celui-ci a proposé dans le problème des partis. CARDAN parle même d'erreur que "même un enfant peut reconnaître" *(a puero etiam cognoscibili)*. Parmi les arguments qu'il emploie pour réfuter cette répartition, deux d'entre eux peuvent aisément être explicités (ce sont ceux que nous avons repris dans (T9)) :

- Le premier consiste à montrer que le partage défavorise celui qui a presque gagné, dans certains cas, comme lorsque l'un des joueurs a gagné 18 parties, l'autre 9 , et que l'on joue en 19 parties. En effet, la règle de PACIOLI, donnant respectivement 2/3 (18/27) et 1/3 (9/27) de la mise à chacun des joueurs, ne rapporte à celui qui a 18 que 1/3 de l'argent déposé par son adversaire, alors qu'il reste à ce dernier 10 parties à gagner (contre 1 pour celui qui a 18 ).
- Le second argument utilise le même type de contre-exemple que TARTAGLIA, prenant cette fois la défense de celui qui n'a (encore) gagné aucune partie face à celui qui en a gagné quelques-unes et qui reçoit cependant toute la mise comme s'il avait gagné le jeu. A noter que CARDAN "généralise" le contre-exemple de TARTAGLIA en considérant comme tout aussi injuste le partage de PACIOLI dans le cas où l'un des joueurs a presque gagné ( 18 parties dans le cas précédent) et où l'autre n'a rien gagné. Car alors, tout donner au premier serait considérer la dernière partie nécessaire (celle de 18 à 19 ) comme superflue.

En ce qui concerne la solution proposée par CARDAN, elle est d'un abord beaucoup plus difficile, le texte, par sa concision même, posant des problèmes d'interprétation.

Notons tout d'abord que CARDAN est le premier (se rapprochant ainsi de PASCAL et FERMAT) à avoir remarqué que ce qu'il faut considérer lorsque les joueurs s'arrêtent, ce n'est pas ce qu'ils ont acquis (ce qui est la position de PACIOLI et même de TARTAGLIA), mais ce qui leur manque pour gagner le jeu (ce qu'il appelle le *terminus ad quem*).

Partant de là ( soit $x$ et $y$ les nombres de parties que devraient encore gagner chacun des joueurs pour remporter le jeu), CARDAN fait intervenir une "progression" *(progressio 3 est 6 ... progressio 7 est 28)* qu'il "applique" à $x$ et $y$. Il trouve ainsi deux autres nombres ( soit respectivement $z$ et $t$ ) à partir desquels il partage proportionnellement la mise ( $t/(z + t)$ pour celui auquel il manque $x$, $z/(z + t)$ pour l'autre).

Or, s'il est facile de remarquer que cette progression correspond à la somme des entiers naturels ( $S_n = n(n + 1)/2$ ), il est beaucoup moins aisé de comprendre par quels raisonnements CARDAN justifie l'utilisation d'un tel outil dans lequel il voyait certainement "le moyen de résoudre rationnellement, et non pas par quelque compromis boiteux comme chez TARTAGLIA, la question du partage équitable" ([3], p. 263).

Ceci peut, en effet, donner lieu à plusieurs interprétations. Nous avons repris dans "l'adaptation-résumé" (cf. (T10)) celle de Moritz CANTOR (12), citée et critiquée par E. COUMET, bien que nous soyons sensibles aux arguments de ce dernier et préférions l'interprétation qu'il propose. Mais celle-ci exigeant une analyse plus fine, et donc plus longue, de "l'esprit de l'argumentation" de CARDAN, nous avons été conduits à faire ce choix "discutable" dans le texte proposé aux élèves. De même, il serait trop long de présenter ici cette interprétation qu'E. COUMET élabore dans son article; nous nous contentons d'en conseiller vivement la lecture ([3] , p. 266-270).

Il nous faut néanmoins citer deux passages du texte de CARDAN, afin de saisir un peu mieux l'esprit de sa démarche :

Le premier est d'une grande clarté :

> *Or la raison démonstrative de ce qui précède est la suivante : si la division une fois faite le jeu recommençait à nouveau, les partis en présence devraient miser la même somme que celle qu'ils ont reçue à condition de s'arrêter de jouer.*

Ce principe, qui lie les "partis" aux "paris", est très proche de la position pascalienne (13), quoique "en sens inverse" d'une certaine manière ([3], p. 263).

C'est à coup sûr la grande originalité de CARDAN que d'avoir adopté ce point de vue. Cela lui fournit un autre argument pour réfuter PACIOLI ([3], p. 263), et lui permet d'expliciter (de manière il est vrai assez confuse) l'usage de sa progression sur un exemple :

> *Quelqu'un dit : "Je veux jouer à cette condition que tu ne puisses vaincre à moins de gagner 3 jeux de suite, et je veux être tenu pour le vainqueur si moi, je gagne 1 jeu. Et celui qui veut gagner 3 jeux mise 2 ducats ; de combien doit être la mise de l'autre ? Je dis qu'il mise 12 ducats. En voici en effet la raison : s'ils avaient à jouer en 1 jeu, il suffirait qu'il mise 2 ducats, et s'ils jouaient en 2 jeux, il devrait miser le triple, car en gagnant simplement 2 jeux, il gagnerait 4 ducats, mais il persévère en*

*courant le risque de perdre le second jeu après avoir gagné le premier, donc il doit avoir un bénéfice triple ; et s'ils jouent en 3 jeux, son bénéfice doit être sextuple, parce que la difficulté est redoublée, donc il devrait miser 12 ducats. Et tout-à-l'heure il a reçu 12 ducats et l'autre 2 : donc la division a été faite de manière convenable...*

La démarche de CARDAN exigerait certes de plus longs développements, et nous sommes tout à fait conscients de l'avoir quelque peu "mutilé" afin de ne pas rendre "illisible" le texte proposé aux élèves (T10). Les exigences de clarté et de concision de la formulation et le respect de l'esprit du texte ne sont pas toujours faciles à accorder. C'est là sans doute une difficulté de cette démarche d'introduction aux textes historiques à l'aide de "pré-textes" ("adaptation-résumés" ou "exercices"). Nous travaillons cependant à une autre rédaction, plus "fidèle", de la "solution de Jérôme".

5) PASCAL ET FERMAT.

Contrairement aux précédents, ces textes (notamment ceux de PASCAL) ont été abondamment étudiés (cf., par exemple, [2] et [6]). D'autre part, même s'ils sont parfois difficilesà suivre "dans le détail", ils demeurent cependant d'un accès plus aisé (ne serait-ce que parce qu'ils représentent ce que nous considérons aujourd'hui comme "LA" bonne solution). La lecture des textes originaux (AV), (AVI), (AVII), accompagnée de celle des "résumés" (T11), (T12), (T13), devrait donc suffire à la compréhension des méthodes de PASCAL et FERMAT. C'est pourquoi nous nous contenterons, dans ce paragraphe, de quelques remarques :

* Comme le rapporte PASCAL lui-même, Antoine GOMBAUD CHEVALIER de MERE (1607-1684) lui posa deux problèmes, dont le second correspond au problème des partis. Pierre de CARCAVI (1603-1684) servit un moment d'intermédiaire entre PASCAL et FERMAT (14) avant que les deux hommes n'entament une correspondance directe, tout au long de l'année 1654.

De cette correspondance, un certain nombre de lettres ne nous sont pas parvenues, notamment celle de FERMAT (antérieure à la lettre de PASCAL du 29 juillet) où celui-ci exposait sa méthode que nous ne connaissons donc que par l'exposé qu'en donne PASCAL (AV). Nous donnons des extraits (15) de trois de ces lettres :

1°) La lettre de PASCAL du 29 juillet, où celui-ci expose sa méthode.

2°) La lettre de PASCAL du 24 août, dans laquelle il expose la méthode de FERMAT pour deux joueurs, et l'objection de ROBERVAL envers cette méthode. PASCAL donne alors les arguments qu'il utilisa pour convaincre ROBERVAL. Enfin, il critique cette même "méthode des combinaisons" (16) dans le cas de trois joueurs.

3°) La lettre de FERMAT du 25 septembre, où le savant toulousain répond aux critiques de PASCAL, et donne clairement le principe de sa méthode.

★ Que l'on célèbre le génie de PASCAL et FERMAT, que l'on s'extasie ou ironise sur cette "rencontre de hasard" entre PASCAL et MERE (17), il n'en reste pas moins que la question de la genèse de la découverte de "la" solution par les deux mathématiciens français reste posée (18).

Question complexe (et encore ouverte), dont nous voudrions simplement évoquer deux aspects :

- Le premier concerne la "dette" de PASCAL et FERMAT envers leurs prédécesseurs (cités dans les quatre premiers paragraphes). Or nulle part, dans la correspondance de 1654 (ou dans le <u>Traité du Triangle Arithmétique</u>), il n'est fait allusion à un des quatre mathématiciens italiens (19). Nous sommes donc conduits à faire des hypothèses à partir de l'analyse des différentes méthodes (voir, par exemple, l'identité de point de vue que nous avons indiquée entre CARDAN et PASCAL).

- Le second s'attache au contexte historique dans lequel les idées de PASCAL et FERMAT virent le jour (statut "théologique" et "juridique" des jeux de hasard, notions de paris, de fortune, de risque...). Nous renvoyons pour tout ceci à un autre article, tout à fait passionnant de E. COUMET ([4]).

★ Reste alors l'analyse des deux méthodes développées dans cette correspondance, et la recherche de la spécificité de chacune d'entre elles (20).

Peut-être serait-il alors préférable de parler de "démarches", car l'opposition des deux mathématiciens se situe précisément dans la manière de "saisir" (au sens premier de "s'emparer de") le problème ; on serait presque tenté de dire : dans la façon qu'ils ont de "se raconter l'histoire" des deux joueurs.

Entre la formulation "personnalisée" (*je suis sûr d'avoir 32 pistoles...*), significative de ce que, faute de mieux, nous appellerons le "style" de PASCAL, et le tableau de FERMAT, entre le raisonnement progressif et récurrent du premier et la "mise à plat" globale et "conventionnelle" du second (*cette fiction d'étendre le jeu à un certain nombre de parties ne sert qu'à faciliter la règle...*), il n'y a pas seulement opposition de deux "techniques" de résolution, mais bien confrontation de deux démarches, de deux "regards"... Ceci dit pour inviter au travail passionnant de "commentaire de texte" détaillé de cette correspondance...

★ Un autre aspect tout à fait intéressant (y compris dans la perspective d'une étude en classe, voir, plus loin, le compte-rendu de la deuxième utilisation proposée), concerne l'aspect argumentatif de cet échange de lettres. Il se cristallise sur deux points :

1° <u>L'objection de ROBERVAL</u> ((AVI) et (T13)) qui représente une objection "forte" (21), très souvent formulée spontanément par des élèves découvrant la méthode de FERMAT, et qui donne l'occasion à PASCAL de développer toute une argumentation à la fois pertinente et "partielle" puisqu'elle est, à notre avis, l'une des causes de "l'incompréhension" (22) de ce dernier en ce qui concerne le deuxième point annoncé ci-dessus :

2°) <u>Le cas de trois joueurs</u> ((AVI), (AVII)) (23) où l'on voit PASCAL commettre une "erreur de lecture" du tableau de FERMAT qui s'explique alors très clairement sur sa méthode, dans sa réponse à PASCAL (24).

Encore une fois, tout ceci est davantage de l'ordre de la remarque (voire de la "piste de réflexion") que de l'analyse. Notre seul but est de montrer combien cette correspondance entre PASCAL et FERMAT peut être riche, si l'on dépasse le simple exposé (trop et mal connu) des deux méthodes de résolution.

Et il en va de même de toute cette présentation. Sa lecture ne permet certes pas de "tout comprendre", ni de clore le sujet, mais se veut, au contraire, point de départ de nouvelles questions et recherches sur des textes qui méritent mieux, à notre avis, que l'oubli (ou le trop rapide survol) dont ils furent l'objet dans la plupart des cas.

Et ceci d'autant plus, répétons le, qu'ils nous semblent parfaitement adaptés (ou adaptables) pour une étude avec des élèves : ce dont nous allons maintenant dire quelques mots.