Recherche d'un problème ouvert en classe de seconde
Le produit maximum

Stéphane Millet
Lycée d'Andrézieu-Bouthéon

« Parmi les décompositions additives d'un entier naturel, trouver celle(s) dont le produit des termes est le plus grand. »

Motivation du choix de ce problème ouvert

Professeur d'une classe de seconde comportant 32 élèves, j'ai proposé ce problème pour plusieurs raisons. Tout d'abord, de façon générale, je tenais à rompre avec le contrat didactique habituel et placer mes élèves en situation de recherche autonome afin de les sensibiliser à une approche expérimentale des mathématiques. Leur demande fréquente de méthodes toutes faites ainsi que leurs réactions face à l'erreur me semblaient trahir un rapport aux mathématiques éloigné de ce qu'est en réalité la pratique habituelle des mathématiciens.

La deuxième raison, plus spécifique au choix de cet énoncé, était de souligner l'importance de la preuve comme outil pour convaincre, et en particulier ici la preuve par l'absurde (« s'il y avait des termes supérieurs à 4 dans la décomposition maximale, alors on pourrait la rendre plus grande »). J'avais également apprécié le fait que ce problème permette de progresser par tâtonnement et de formuler des conjectures fausses (du type « il faut un maximum de 3 »), pouvant être facilement invalidées par la classe lors de la phase de débat à l'aide de contre-exemples judicieusement choisis.

J'attendais donc de montrer à la classe que le tâtonnement peut permettre de mettre au jour une conjecture qui s'affine davantage au fur et à mesure de l'apparition d'erreurs commises puis rectifiées.

Modalités de mise en œuvre

Le créneau horaire était de deux fois 55 minutes, et la séance a été découpée en deux phases distinctes : la <u>phase de recherche</u> (environ 1 h) et la <u>phase de débat</u> (environ 45 minutes). J'avais initialement prévu d'allouer autant de temps à ces deux phases.

<u>Phase de recherche</u> :

Dans un premier temps, tous les élèves sont réunis pour la présentation de l'activité, du planning et enfin de l'énoncé lui-même. Pour expliquer le terme « décomposition additive », je donne l'exemple 26=10+15+1. Les élèves sont ensuite invités à une recherche individuelle d'un peu moins de 10 minutes.

J'ai partagé la classe en groupes de quatre élèves, en prenant soin de former des groupes hétérogènes, mais pas trop afin de limiter l'apparition d'un « leadership » démesuré ; les élèves travaillent alors dans deux salles contiguës réservées pour l'occasion. L'objectif annoncé est alors, pour chaque groupe, la rédaction d'une affiche visant à convaincre la classe de la validité de la réponse au problème posé ; un temps de 10 minutes étant prévu pour la réalisation de cette affiche. Chaque groupe doit désigner un porte-parole et un rédacteur dont les rôles ont été précisés dans la présentation de l'activité.

Dans cette phase, j'observe le travail des groupes, mais n'interviens pas sur le contenu mathématique des élèves.

Je suis passé de groupe en groupe en proposant de faire le point sur l'avancement des recherches. D'une manière générale, j'ai plutôt cherché à intervenir le moins possible par peur d'interférer avec le travail du groupe. J'ai quand même fini par suggérer à un groupe de trois qui n'avait pas la « tête de groupe » prévue de tester d'abord sur des petits exemples… Sinon, j'essayais de voir chaque affiche en vérifiant à quel point elle s'approchait de la bonne conjecture (je me serais bien penché sur les démonstrations, mais il n'y en avait pas !).

Phase de débat :

Tous les élèves reviennent dans la salle initiale. J'expose une affiche claire, mais fausse (conjecture selon laquelle il faut le plus de 3 possible) et invite chaque groupe à se concerter environ 5 minutes pour accepter ou rejeter la conjecture. Ils doivent donner un argument qui est noté sur une affiche prévue à cet effet. Ensuite, chaque porte-parole expose successivement son verdict avec l'argument associé.

Dans un second temps - après avoir donné la parole au groupe de l'affiche concernée pour qu'il puisse réagir - je soumets chaque argument au vote à l'unanimité de la classe. Soit on le conserve, soit on le raye, soit on lui appose un point d'interrogation si l'on ne parvient pas à un consensus.

Je groupe ensuite des affiches semblables et les commente rapidement pour exposer en dernier celle qui est la plus proche de la solution. La classe lui soumet le même traitement qu'à la première affiche exposée. Puis je reprends la main lors des 5 dernières minutes pour conclure la séance.

Impressions sur la séance

D'une manière générale, les élèves sont bien entrés dans la recherche, même si l'énoncé les a tout d'abord déstabilisés. À peine avais-je écrit l'énoncé que les « je comprends rien » ou « vous pouvez traduire ! » fusèrent dans la classe. Une fois que j'ai étayé par un exemple, ils ont pu commencer à faire des essais. La phase de recherche individuelle s'est essoufflée assez rapidement et seulement une petite minorité d'élèves n'a vraiment pas réussi à amorcer un quelconque travail. Il est à noter une manifestation patente du contrat didactique de la part d'un élève qui m'a demandé si le problème portait sur le chapitre actuel et s'il devait se munir de son cours.

Comme de coutume, si l'on en croit les auteurs de l'ouvrage « Les pratiques du problème ouvert », une compétition intergroupe s'est instituée d'elle-même pour certains élèves, alors même que j'avais préalablement précisé qu'il s'agissait de former des pools de recherches, tous orientés vers la réalisation commune d'une réponse à la question.

Les groupes ont d'emblée cherché à exprimer au mieux la conjecture envisagée, notamment par la recherche d'une formule. Aucun n'a cherché à comprendre le phénomène, et encore moins à le démontrer… Il semble qu'il y ait eu un glissement de la tâche depuis l'explication d'une propriété vers la façon d'exprimer cette propriété.

La phase de débat a été organisée en alternant des temps collectifs et des temps de travail à l'intérieur des groupes. La difficulté de la gestion de cette phase résulte à mon sens de plusieurs facteurs :

- La difficulté pour certains élèves de se distancier de leur propre travail.
- Le temps, difficile à gérer (entre le temps incompressible des séquences de classe et le temps forcément long d'appropriation du problème et des réponses des autres groupes).
- Le volume sonore, d'autant plus élevé que les élèves prennent part activement au travail…

J'aurais dû prévoir davantage de temps pour le débat, même s'il était dur de les interrompre plus tôt dans leurs recherches. La contrainte de temps m'a amené à reformuler avec excès les arguments qui me semblaient pertinents, et mon insistance finissait par emporter l'adhésion grâce à l'aura de mon statut de professeur. De fait, la validation par la classe seule fut un peu biaisée.

À aucun moment l'absence de preuve ne fut employée comme argument pour rejeter une affiche. Et pour cause : aucun groupe n'a jugé bon de prouver quoi que ce soit, mais la situation permettait-elle, en l'état, de conduire les élèves vers cette recherche ? Il va sans dire que l'objectif concernant la preuve et le raisonnement par l'absurde ne fut absolument pas atteint. Par contre, celui de confronter les élèves à une situation propice à l'expérimentation en mathématiques fut une réussite. De surcroit, tous étaient impatients d'avoir le fin mot. Si la preuve ne leur semblait pas cruciale lors de la phase de validation collective, au bout du compte, cela ne leur suffisait pas dans l'absolu puisqu'ils furent curieux d'obtenir ma solution.

J'ai pu souligner en fin d'heure le rôle de l'erreur pour « cerner » le problème (savoir dans quels cas une conjecture fausse est valide permet de préciser, d'affiner, la nature de la solution) et mettre le doigt sur l'absence de preuve. Le lendemain, j'ai demandé en devoir maison que chaque groupe fournisse, au vu de mes remarques et de l'ensemble des affiches, une version « finalisée » de leur réponse, avec une preuve ou des pistes de preuve.

L'impression générale est plutôt positive, même si l'on est très loin des objectifs initiaux.

Annexe : les affiches produites par les élèves (orthographe d'origine).

<u>Groupe A</u>

1 – Pour les entiers multiples de 3, la solution sera une decomposition de 3.

Ex : $12 = 3+3+3+3$ $\qquad 3^4 = 81$

2 – Pour les entiers multiples de 3+1, ce sera une decomposition de deux fois 2 et de 3.

Ex : $9+1=10=2+2+3+3$ $\qquad 2^2 \times 3^2 = 36$

3 – Pour les entiers multiples de 3+2, ce sera une decomposition d'une fois 2 et de 3.

Ex : $9+2=11=2+3+3+3$ $\qquad 2\times 3^3$

Attention : pour 1, ces règles ne marchent pas.

<u>Groupe B</u>

Pour tout nombre divisible par 3, on prend pour décomposition additive $3+3+3...$ le nombre de 3 dépend du résultat de la division étudiée.

<u>Exemples</u> : $6=3+3 : 3\times 3=9$ $\qquad 6=2+2+2 : 2\times 2\times 2=8$ $\qquad \boxed{9>8}$

Dans les autres cas qui ne sont pas divisible par 3, il faut décomposer par le plus de 3 possible et completer par un 2 ou plusieurs si nécessaire…

$8 = 3+3+2 : 3\times3\times2 = 18$
$22 = 3+3+3+3+3+3+2+2 : 3\times3\times3\times3\times3\times3\times2\times2 = 2916$

<u>Groupe C</u> $\boxed{\text{Maths}}$

- <u>exemples</u> :

$12 = 2+2+2+2+2+2 = 2^6 = 64$ $\quad$ $12 = 3+3+3+3 = 3^4 = 81$ $\quad$ $\boxed{81 > 64}$
$15 = 2+2+2+2+2+2+3 = 2^6 \times 3 = 192$ $\quad$ $15 = 3+3+3+3+3 = 3^5 = 243$ $\quad$ $\boxed{243 > 192}$
$25 = 2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+3 = 2^{11} \times 3 = 6144$
$25 = 3+3+3+3+3+3+3+2+2 = 3^7 \times 2^2 = 8748$ $\quad$ $\boxed{8748 > 6144}$

- <u>Conjecture</u> : Pour trouver le produit des termes le plus grand possible, il faut : décomposer ce nombre avec le plus de 3 possible (multiples de 3), si la somme des 3 ne suffit pas, il faut compléter par des 2.

<u>Groupe D</u> <u>Problème</u> :

$\square 0 = 0$ $\square 1 = 1$ $\square 2 = 2$ $\square 3 = 3$ $\square 4 = 2+2 \rightarrow 2\times2 = 4$ $\square 5 = 3+2 \rightarrow 3\times2 = 6$ $\square 6 = 3+3 \rightarrow 3\times3 = 9$
$\square 7 = 3+2+2 \rightarrow 3\times2\times2 = 12$ $\square 8 = 3+3+2 \rightarrow 3\times3\times2 = 18$ $\square 9 = 3+3+3 \rightarrow 3^3 = 27$ $\square 10 = 3+3+2+2 \rightarrow 3^2 + 2^2 = 3$
$\boxed{N > 10 = 3x + 2y \rightarrow 3^x \times 2^y}$ avec y le plus petit possible.

<u>Explication</u> : Il faut décomposer l'entier naturel en le plus de termes de 3 possible en complétant avec des termes de 2.

<u>Groupe E</u>

Plus il y a de termes, plus le produit sera grand !

Ex : 38
$\rightarrow 3^{12} + 2^1 = 1062882$ $\quad$ $4^9 + 2^1 = 524288$ $\quad$ $2^{19} + 0 = 524288$ $\quad$ $5^7 + 3^1 = 234275$

Le produit qui permet de trouver le plus grand résultat est <u>3</u>.

On définit les inconnus de l'équation suivante : $x : 3 = y + (z : 2)$ avec x entier naturel, y produit de 3 et z reste.

<u>Groupe F</u>

<u>Conjecture</u> : Pour trouver le produit le plus grand des termes de la décomposition additive d'un nombre entier naturel, il faut décomposer ce nombre avec le plus de trois possible.

<u>exemples</u> : $33 \rightarrow 3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3$ $\quad$ $3^{11} = 177147$
$26 \rightarrow 3+3+3+3+3+3+3+4$ $\quad$ $3^7 \times 4 = 8748$

<u>Groupe G</u>

Etant donné que le chiffre 1 n'a aucun impact dans les multiplications, on ne s'en servira pas durant cette recherche.

$32 = 2\times16$	$2^{16} = 65536$
$32 = 3\times10+2$	$3^{10}\times2 = 118098$
$32 = 4\times8$	$4^{8} = 65536$
$15 = 3\times5$	$3^{5} = 243$
$15 = 2\times6+3$	$2^{6}\times3 = 192$
$15 = 4\times3+3$	$4^{3}\times3 = 192$

hypothèse : Il faut toujours essayer de multiplier par le plus de 3 possible.

<u>Groupe H</u>

avec la formule :

$\frac{60}{3} = 20 \quad 3^{20} = 3486784401 \ (3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3)$

Nous pensons que le chiffre 3 est la solution de ce probleme. Le chiffre 3 puissance $\frac{nombre}{3}$ donne le résultat le plus élevée pour de nombreux calcul. Nous n'avons pas trover de contre exemple.

Avec le chiffre 61 $\rightarrow \frac{61}{3} = 20,\overline{33}$ soit $\frac{20+20+21}{3}$

$3^{19}\times4$ soit $(3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times4)$

$= 4649045868$