Dés truqués

Est-il possible de truquer deux dés de telle sorte que les onze sorties possibles pour la somme, 2, 3, ...12, soient équiprobables ?

La réponse est non.

Première démonstration

Appelons respectivement p_1,p_2,..., p_6 et q_1,q_2,..., q_6 les probabilités de tirer 1,2,... 6 avec chacun des dés, et S la variable aléatoire : somme des résultats des deux dés.

Prob [S=2] = p_1q_1

Prob [S=12] = p_6q_6

Prob [S=7] = $p_1q_6 + p_2q_5 + p_3q_4 + p_4q_3 + p_5q_2 + p_6q_1$

Prob [S=7] $> p_1q_6 + p_6q_1$

Supposons toutes les sommes équiprobables. On a alors $p_1\ q_1 = p_6\ q_6 = \dfrac{1}{11}$ donc $p_1q_6 = \dfrac{p_1}{11p_6}$ et $p_6q_1 = \dfrac{p_6}{11p_1}$

$p_1q_6 + p_6q_1 = \dfrac{p_1}{11p_6} + \dfrac{p_6}{11p_1} = \dfrac{1}{11}\left(\dfrac{p_1^2 + p_6^2}{p_1p_6}\right)$

Or $\forall x, y, \dfrac{x^2+y^2}{xy} \geqslant 2$

$p_1q_6 + p_6q_1 \geqslant \dfrac{2}{11}$, donc Prob [S=7] $> \dfrac{1}{11}$.

Deuxième démonstration

On considère deux polynômes de degré 5 :

P(x) = $p_1 + p_2x + p_3x^2 + p_4x^3 + p_5x^4 + p_6x^5$ et Q(x) = $q_1 + q_2x + q_3x^2 + q_4x^3 + q_5x^4 + q_6x^5$, dont le produit a pour coefficients les Prob [S=k] ($k \in \{2, 3, ...12\}$)

P(x)Q(x) = $p_1q_1 + (p_1q_2 + p_2q_1)x + ...$

Supposons toutes les sommes équiprobables, alors

P(x)Q(x) = $\dfrac{1}{11}(1 + x + x^2 + ... + x^{10}) = \dfrac{1}{11}\left(\dfrac{1-x^{11}}{1-x}\right)$

Les racines de P(x)Q(x) sont les racines onzièmes de 1 autres que 1, donc ce polynôme n'a pas de racines réelles, alors que P(x) et Q(x), étant de degré impair, ont chacun au moins une racine réelle.