Le jeu des tours de Hanoï.

Compte rendu d'une séance de recherche en 1ère S

Delphine THEREZ

<u>Le jeu des tours de Hanoï</u>

On dispose de trois piquets avec socle, numérotés 1, 2 et 3, et de n disques troués qui sont deux à deux de tailles différentes.

Au départ, les n disques sont empilés par ordre croissant de taille sur le piquet n°1.

Le but du jeu est de déplacer ces n disques du piquet n°1 sur le piquet n°3, en respectant les règles suivantes :

- On ne déplace qu'un seul disque à la fois et le disque déplacé doit être sur l'un des deux autres piquets; c'est ce que l'on appelle un déplacement.

- Un disque ne doit jamais être placé au-dessus d'un disque plus petit que lui.

1) Déterminer le nombre minimal de déplacements nécessaires pour résoudre le problème en fonction de n (le nombre de disques).

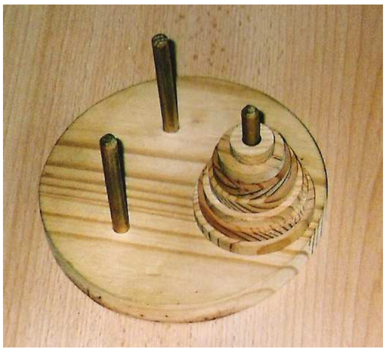
2) On suppose qu'il faut 5 secondes pour déplacer un disque, combien de temps le jeu durera-t-il avec trente disques en travaillant jour et nuit ?

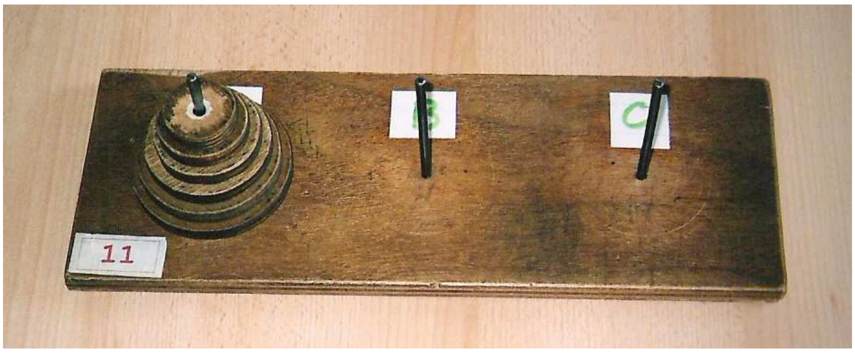
J'ai demandé aux élèves de décrire tous les raisonnements et idées qui leur venaient pendant la recherche du problème.

Modalités de mise en œuvre :

Le problème a été cherché par une classe de $1^{ère}$ S du **lycée Frédéric Faÿs** de Villeurbanne, constituée le jour de la recherche de 27 élèves .La séance a eu lieu pendant deux heures de cours consécutives.

Les élèves se sont groupés librement par 2, 3 ou 4. Les énoncés ont été distribués pendant la mise en place des groupes. Puis des jeux des tours de Hanoï prêtés par la régionale de l'APMEP ont circulé entre les groupes.





Les comptes-rendus de recherche des groupes ont été ramassés en fin des deux heures.

Place du problème dans la progression :

Ce problème a été proposé juste avant le chapitre sur les suites. La résolution du problème avec les notations des suites a été faite tout au long du chapitre dont voici le plan :

I. Qu'est-ce qu'une suite ?

1. Définition

Illustration des notations : on note d_n le nombre de déplacements minimum lorsque la tour est constituée de n disques. On a $d_0 = 0$; $d_1 = 1$; $d_2 = 3$; $d_3 = 7$ (explication des résultats à l'aide du jeu)

2. Comment définir une suite ?

Illustration de la définition par relation de récurrence : explication à l'aide de la tour de la relation $d_{n+1} = 2d_n + 1$

3. Représentation graphique d'une suite

Illustration des différents types de représentation à l'aide de d_n : d_n en fonction de n dans un repère orthonormé puis comment représenter les termes d_n sur l'axe des abscisses à l'aide des droites d'équation $y = 2x + 1$ et $y = x$.

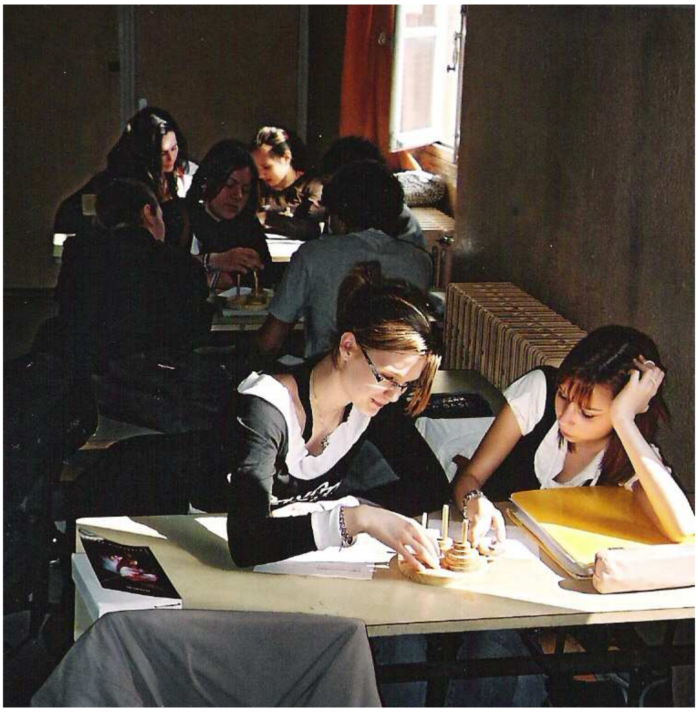
II. Variations et convergence d'une suite

Illustration des notions à l'aide de cet exemple (simples conjectures)

III. Suites arithmétiques et géométriques

Obtention de la formule en fonction de n à l'aide d'une suite intermédiaire ($U_n = d_n + 1$) et des formules sur les suites géométriques ($d_n = 2^n - 1$).

La proposition de recherche est aussi l'occasion de rompre avec le contrat habituel. J'ai insisté pendant la séance sur le fait que ce qui m'importait le plus était de voir comment ils avaient appréhendé le problème et raisonné et non la résolution effective du problème.
Je me suis de plus efforcée de laisser les groupes chercher en toute autonomie.

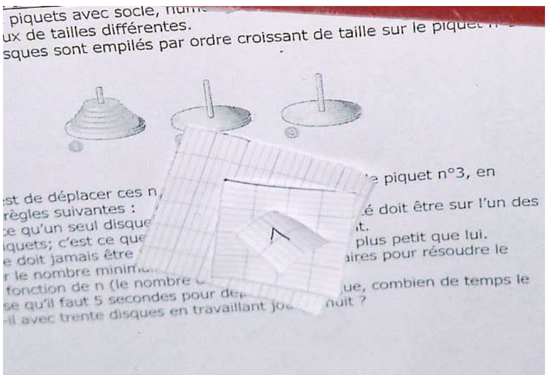


Déroulement des recherches

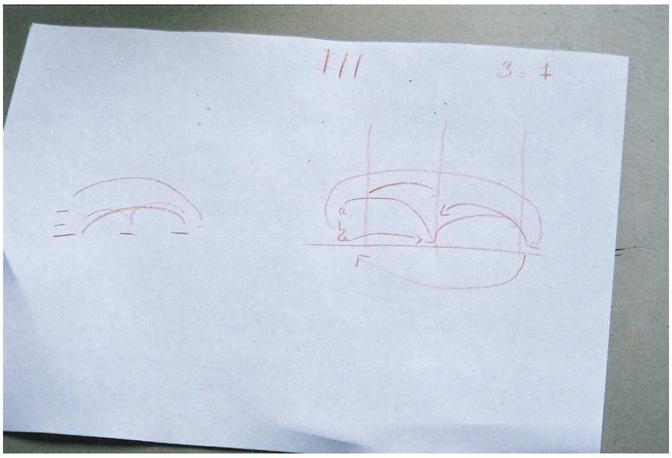
J'ai commencé par sonder chaque élève rapidement, avaient-ils déjà entendu parler de ce jeu, ou jouer avec ? Deux élèves y avaient déjà joué sur internet, deux élèves en avaient entendu parler et un avait déjà rencontré le problème avec son professeur de mathématiques de seconde mais apparemment pas de manière approfondie. Cela n'a pas eu d'incidences sur la recherche des élèves : Certains sont allés un peu plus vite dans la résolution du problème de la tour mais ils devaient convaincre ensuite les autres membres de leur groupe.

Il n'y avait pas assez de jeux manipulables pour tous les groupes. Les groupes qui ont commencé sans jeu ont eu beaucoup de mal à comprendre et appréhender le problème. Au bout d'une dizaine de minutes, j'ai fait tourner les jeux en demandant à ceux qui ne les avaient plus de commencer à écrire leurs premières impressions face au problème. Un seul groupe a vraiment commencé à rédiger ses premières constations. Sans le jeu, Les autres semblaient bloqués.

Un seul groupe a résolu ce problème en construisant un jeu en papier (7 quadrilatères de tailles différentes vite découpés puis numérotés).



Les questions ne semblent pas vraiment avoir été lues dans un premier temps. Les élèves se concentrés surtout sur le jeu : comment transférer la tour du piquet n°1 sur le piquet n°3.



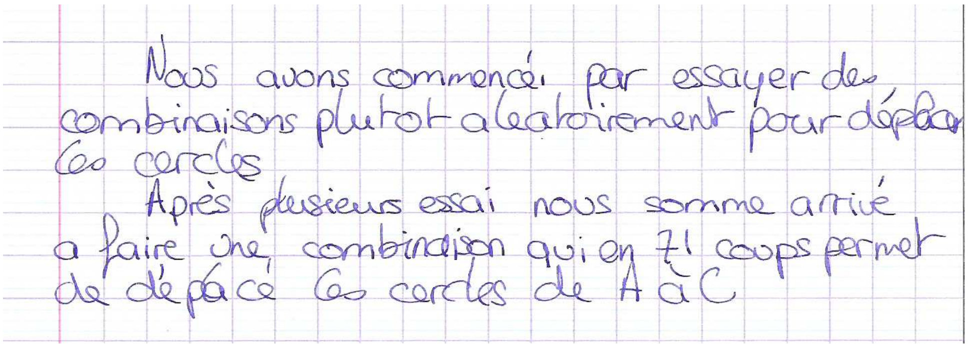
Sur les huit groupes, quatre n'ont plus eu besoin des jeux au bout d'une heure (parmi ceux là, un groupe a voulu tester ses conjectures une dernière fois).

Au bout d'une demi-heure, tous les élèves semblaient comprendre comment déplacer la tour, mais beaucoup semblaient loin de la recherche du nombre de déplacements pour n pièces.

Descriptions de quelques recherches et résultats des élèves :

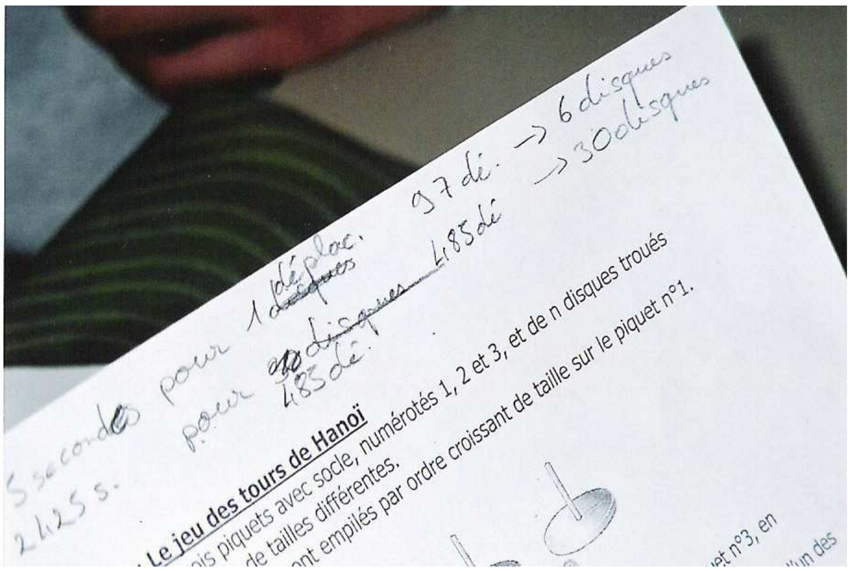
- **5 ou 6 ?:**

Entre le dessin de l'énoncé et les jeux manipulables, le nombre de disques était différent. Certains groupes se sont bloqués sur cette différence, et ont eu du mal à généraliser. Ils ont occulté la question avec n. J'ai entendu ainsi un groupe m'interpeller en me disant : "Nous avons trouvé, la réponse est 71.". J'ai également été surprise que peu de groupes simplifient le problème en réduisant le nombre de disques dans leur première phase de recherche.


Nous avons commencé par essayer des combinaisons plutot aleatoirement pour déplacer les cercles
Après plusieurs essai nous somme arrivé a faire une combinaison qui en 71 coups permet de déplacé les cercles de A à C

- **La proportionnalité :**

Certains groupes ayant trouvé le nombre minimal de déplacements pour 6 disques, ont multiplié par 5 leurs résultats pour répondre à la 2ème question. Aussi, un groupe m'a appelé pour me dire qu'ils avaient trouvé la réponse à la question 2 : "on sait que pour 6 disques, il faut 97 déplacements" (ce qui par ailleurs est faux) "donc pour trente disques, il faudra 97*5 = 485 déplacements." Pour que le groupe n'arête pas sa recherche à ce niveau là, je leur ai demandé, quel était alors le résultat pour 3 disques. Leur raisonnement précédent leur a fait trouver 48,5 donc l'hypothèse de proportionnalité a été rejetée.



- **<u>Comment compter?</u>**

  Dans un premier temps beaucoup comptaient le nombre de déplacements à l'oral : un manipule le jeu et un autre compte, ce qui est peu fiable quand celui qui manipule à parfois des hésitations. Puis, certains groupes ont fabriqué des codes pour conserver une trace écrite des mouvements. J'ai d'ailleurs constaté que le même type de codage a été adopté dans plusieurs groupes sans qu'il y ait eu de copiage entre eux.

<u>Illustration 1 (les codages 1…)</u>

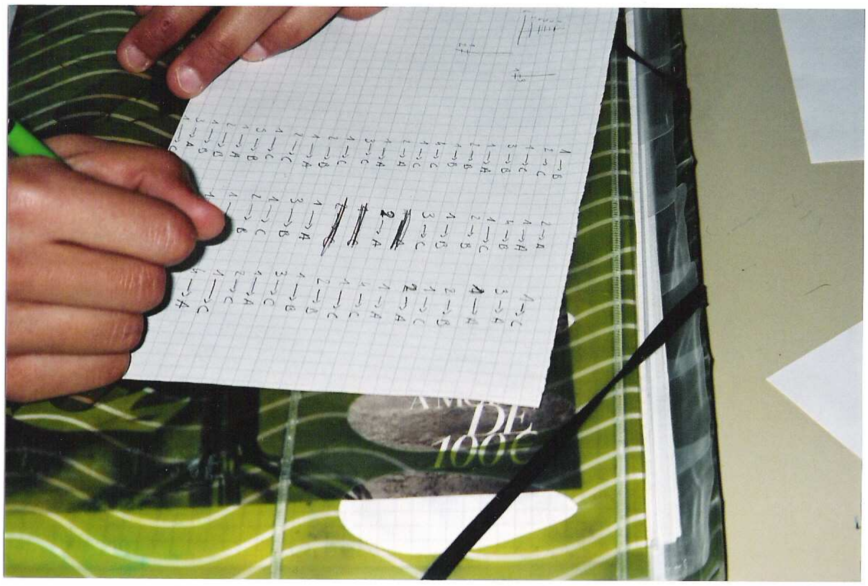
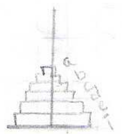
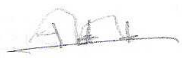
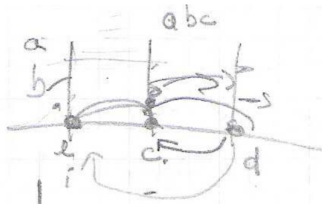


Illustration 2 (les codages 2…: dans un autre groupe)







a -> 3
b -> 2
a -> 2
c -> 3
a -> 1
b -> 3
a -> 3
d -> 2
a -> 2
b -> 1
a -> 1
c -> 2
a -> 3
b -> 2
a -> 2
e -> 3
a -> 1
b -> 3
a -> 3
c -> 1
a -> 2
b -> 1
a -> 1
d -> 3
a -> 2
b -> 3
a -> 3
c -> 2
a -> 2
b -> 1
a -> 1
c -> 3
a -> 2
b -> 3
a -> 3
i -> 2
a -> 2
b -> 1
a -> 1
c -> 2
a -> 3
b -> 2
a -> 2
d -> 1

c -> 1
a -> 3
b -> 1
a -> 1
d -> 2
a -> 3
b -> 2
a -> 2
c -> 3
a -> 1
b -> 3
a -> 2
b -> 1
a -> 1
c -> 2
a -> 3
b -> 2
a -> 2
e -> 1
[a -> 1
b -> 3
a -> 3
c -> 1
a -> 2
b -> 1
a -> 1
d -> 3
a -> 2
b ⇒ 3
a -> 3
c -> 2
a -> 1
b -> 2
a -> 2
d -> 1
a -> 3
b -> 1
a -> 1
c -> 3
a -> 2
a -> 3
b -> 2
a -> 2
c -> 1

a -> 3
b -> 1
a -> 1
i -> 3
a -> 3
b -> 2
a -> 2
c -> 3
a -> 1
b -> 3
a -> 3
d -> 2
a -> 2
b -> 1
a -> 1
c -> 2
a -> 3
b -> 2
a -> 21
e -> 3
a -> 1
b -> 3
a -> 3
c -> 1
a -> 2
b -> 1
a -> 1
d -> 3
a -> 3
b -> 2
a -> 2
c -> 3
a -> 1
b -> 3
a -> 3

a -> 2
b -> 3
a -> 3
c -> 2
b -> 2
a -> 1
a -> 2
d -> 3
a -> 3
b -> 1
a -> 1
c -> 3
b -> 3
a -> 3
e -> 2
a -> 1
b -> 2
a -> 2
c -> 1
a -> 3
b -> 1
a -> 1

- **Piquet final :**

  Quelques groupes ont réfléchi à la manière de commencer les déplacements : suivant la parité du nombre de disques, la pièce la plus petite doit être déposée sur le piquet B ou C pour obtenir la tour finale sur le piquet C. (une autre question que celle qui leur était posée)

Quand le nombre de disque est paire,
le mouvement de départ est de A vers B et B vers C
Quand le nombre de disque est impaire,
le mouvement de départ est de A vers C et
C vers B.

Les disques paires ou impaires situés au milieu de la pile
ce déplace un moment ou un autre à l'inverse
du déplacement.

- **Vrai minimum ?**

  Un seul groupe s'est inquiété de ne pas savoir démontrer que leur stratégie (la bonne en l'occurrence) pour les déplacements était bien la plus optimale. Comment être sûr que les nombres qu'ils avaient obtenus étaient les bons ?

- **Courbe :**

  Deux groupes_ont pensé à représenter graphiquement les résultats (mais ils n'ont pas cherché davantage si cela correspondait ou non à une fonction connue), un des deux s'est même efforcé de faire une représentation à l'aide de la calculatrice.

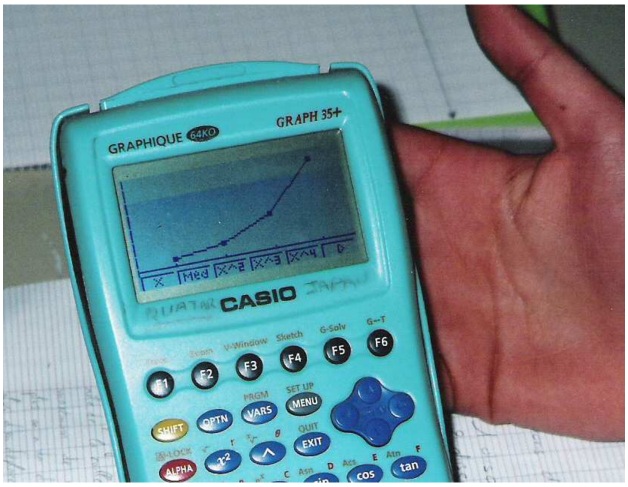
À la calculatrice. Casio Graph 35+

STAT

	List 1	List 2
1	2	3
2	3	7
3	4	47
4	5	41

set => Stat Graph 1
Graph Type : xyLine
X List : List 1
Y List : List 2
Frequency : 1
Mark type : x

GRPH
GPH 1



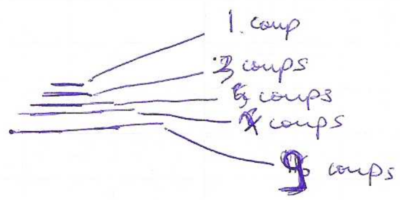
- **<u>Récurrence :</u>**

  Trois des groupes ont trouvé la formule de récurrence attendue. Leur raisonnement pour deux d'entre eux s'est surtout basé sur les résultats chiffrés du nombre de déplacements qu'ils avaient obtenus pour n variant de 1 à 6 : Ils ont cherché comment on pouvait passer d'un nombre à un autre. Un élève m'a expliqué : "L'écart entre chaque nombre est à chaque fois multiplié par 2." Un seul groupe semble avoir trouvé la formule à partir du jeu même (j'ai eu beaucoup de mal à faire rédiger ce groupe (n°1)).

<u>Groupe 1</u>

Coups 16 8 4 2 1

(N) numéro du disque N_1 N_2 N_3 N_4 N_5



Faire la somme des coups

Pour déplacer le 1ère disque (le + gros) sur le piquet n°3 il faut effectuer 16 coups. Pour le 2ème 8 coups, pour le 3ème 4 coups, pour le 4ème 2 et pour le dernier 1 coup. Donc pour déplacer 5 disques il faut effectuer 31 coups (16+8+4+2+1)

5 ~~coups~~ disques = 31 coups

6 disques = 37,2 coups

Nous remarquons qu'il n'y a pas proportionalité

$n = n-1 \times 2+1$

On pensait que le ~~déplacement minimum~~ nombre minimum de déplacements à effectuer pour déplacer les 6 disques était (de 1 vers 3) de 97. Mais comme le nombre de déplacements n'est pas proportionnel au nombre de disques (en comptant les déplacements inutiles) on en est venu à penser que 97 n'est pas le minimum.

Nous pensons que :

		* écart	
1 disque	→ 1 déplacement		
		+2*	x
2 "	→ 3 "		
		+ 4	$+2x$
3 "	→ 7 "		
		+ 8	$+4x$
4 "	→ 15 "		
		+ 16	$+8x$
5	→ 31 "		
		+ 32	$+16x$
6	→ 63 "		

Les écarts sont des multiples de 2, on pose donc $x = 2$

On en déduit les équations suivantes :

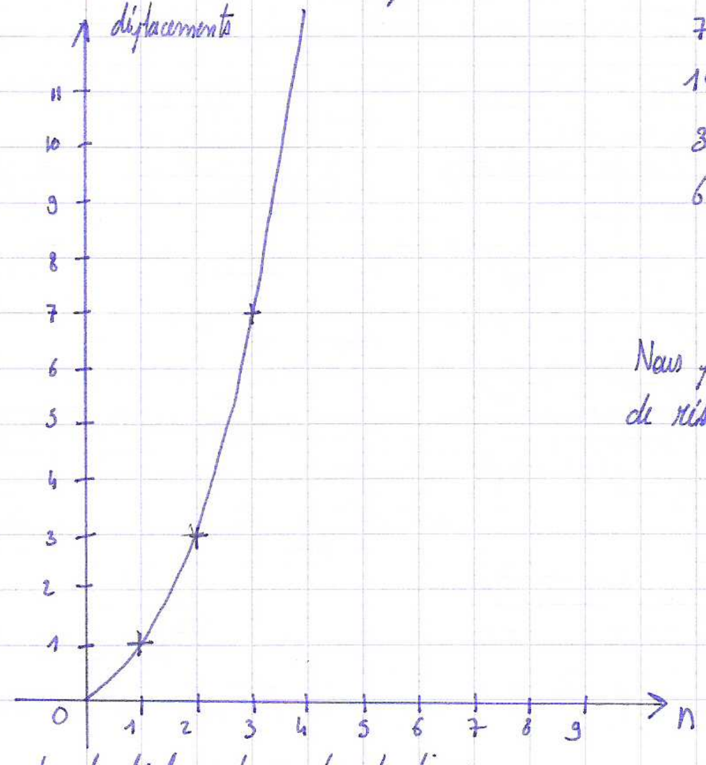
$3 = x + 1$

$7 = 2x + 3$

$15 = 4x + 7$

$31 = 8x + 15$

$63 = 16x + 31$



Nous pensons que les suites sont un moyen de résoudre le problème.

nombre de déplacements en fonctions du nombre de disque

Groupe 3

Nous avons tout d'abord essayé avec seulement trois disques. En effet il s'avère qu'un premier essai avec les 6 est trop difficil.
Donc au début, avec les trois disques, nous avons réussi avec 7 mouvements.
Puis, nous sommes passés à quatre disques. Nous avons encore une fois réussi sans difficulté en 17 mouvements.
On peut donc en conclure que le nombre de mouvements par rapport au nombre de disques n'obéit à aucune règle de proportionnalité :

3 → 7
4 → 17 ~~16~~

En effet, après avoir refait les mouvements, nous estimons que 7 et 17 sont le nombre de mouvements minimum pour respectivement 3 et 4 disques.
Pour 5 disques, le meilleur résultat obtenu est de 50 mouvements.
Après de nombreux essais, nous avons « chopé » le truc et nous ~~parvenu~~ sommes parvenus à atteindre 33 mouvements pour 5 disques et à réduire de 2 ~~mouvements~~ les 17 mouvements nécessaires pour 4 disques.

soit $1n = 1$
$3n = 7$
$4n = 15$
$5n = 33 \xrightarrow{\text{puis}} 31$

Nous avons élaboré une théorie un peu difficile à expliquer : ~~quand n = 1~~ disque, ~~n = 1 (di~~
voir au dos SVP.

~~T_n~~ ~~$2n$~~

quand 1 disque, 1 déplacement ; $\times 2 + 1$

quand 2 disques, 3 déplacements ; $\times 2 + 1$

quand 3 disques, 7 déplacements ; $\times 2 + 1$

quand 4 disques, 15 déplacements ; $\times 2 + 1$

quand 5 disques, 31 déplacements ; $\times 2 + 1$

quand 6 disques, 63 déplacements.

On pose d le nombre de déplacements.
On en arrive à la conclusion que :

$$\boxed{d_{n\,\text{disques}} = d_{n-1\,\text{disque}} \times 2 + 1}$$

$d_{30} = d_{29} \times 2 + 1$

$d_{30} = (d_{28} \times 2 + 1) \times 2 + 1$

$d_{30} = ((d_{27} \times 2 + 1) \times 2 + 1) \times 2 + 1)$

$d_{30} = (((d_{26} \times 2 + 1) \times 2 + 1) \times 2 + 1) \times 2 + 1)$

$d_{30} = \cancel{1\,073\,7}\ 1\,073\,741\,823$

$d_2 = 2d_1 + 1$

$d_2 = (2d_0 + 1) \times 2 + 1$

$d_2 = 4d_0 + 2 + 1$

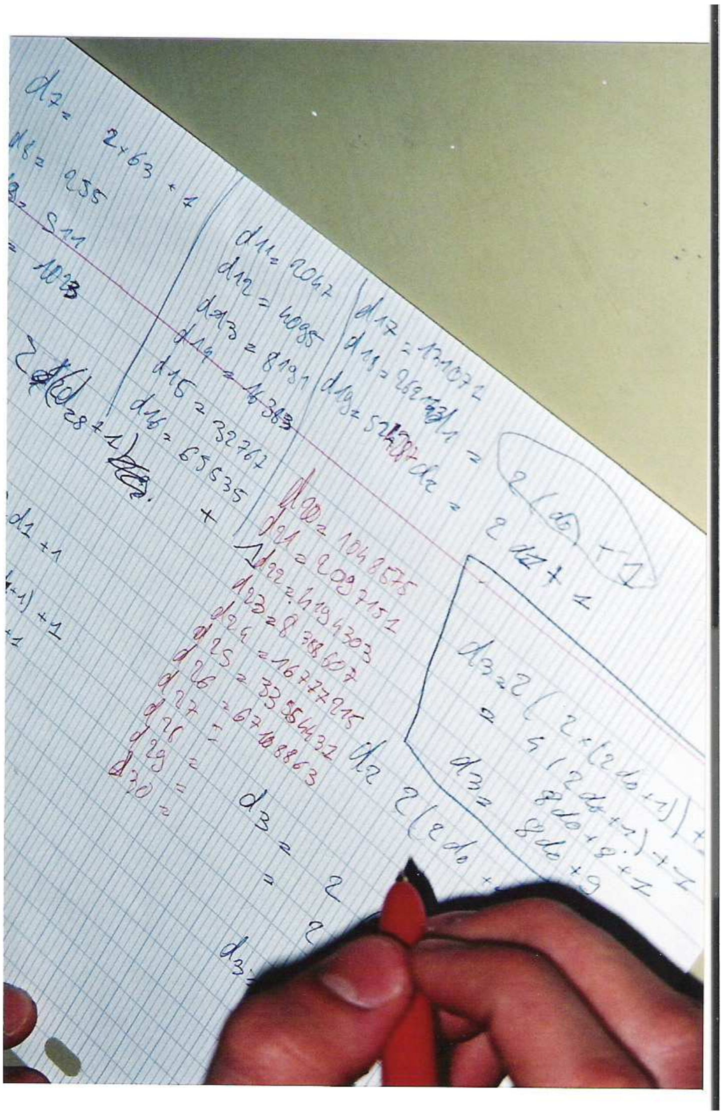
$d_2 = 3$

soit $1\,073\,741\,823 \times 5 = 5\,368\,709\,115$

$5368709115 \div 3600 \div 24 = 62\,137$ jours.

- **<u>En fonction de n :</u>**

  Un seul groupe a essayé d'obtenir une formule en fonction de n. Ils ont assez vite abandonné la recherche d'une formule générale pour se concentrer sur le cas des trente disques. Comme ils ne souhaitaient pas chercher dans un premier temps par calcul itératif (ils avaient trouvé la relation de récurrence) ils ont cherché à exprimer d_{30} en fonction de d_1. Ils se sont arrêtés à d_{30} en fonction de d_{27}. Ils ont traduit leur recherche pour obtenir d_3 puis d_4 en fonction de d_0 (ils ont introduit d_0 de façon naturelle et ont vérifié que la valeur 0 correspondait à la situation étudiée et à leur formule). Ils ont fini par calculer d_{30} à l'aide de la touche Ans (Rep) de leur calculatrice.



Conclusion

La majorité s'est bien pliée au jeu de la recherche, trouvant que les deux heures étaient vite passées. Certains élèves plus en difficulté pour la mise en forme auraient peut-être eu besoin d'une demi-heure de plus. Pour ceux-là, je ne suis pas sûre que l'activité ait facilité l'introduction des suites numériques. Pour les groupes qui ont trouvé la relation de récurrence, les notations ont été plus facilement acquises.

Pour tous néanmoins, le rappel de cet exemple tout au long du cours a été un bon support. Cependant, ce n'était pas le seul objectif visé par cette séquence :

- chaque résultat a pu être mis en valeur car contrairement aux résolutions d'exercices habituels, ce qui importait était la réflexion autour d'un problème et pas uniquement sa résolution. Les élèves étaient alors incités à prendre des initiatives, ils ont ainsi développé leur autonomie en phase de recherche.
- la rédaction de leurs idées était aussi un point important. Décrire sa démarche, exprimer ses idées de recherche était un exercice formateur et différent de ce que je leur demande le reste de l'année.