

Billes et biberons

Compte rendu d'un stand du rallye mathématique de Lyon



©Eric.Le Roux/Communication/UCBL

Delphine THEREZ

Le contexte

Le rallye mathématique concerne les classes de 3^{ème}, 2^{nde} et 2^{nde} professionnelles de l'académie de Lyon. Après une épreuve écrite en mars 2009, 10 classes ont été invitées à l'université Lyon 1 pour la fête des maths qui a eu lieu le 12 mai. Le matin, les classes ont suivi un parcours constitué de 4 épreuves. C'est l'une d'elles que nous allons décrire ici.

L'épreuve fait écho à la rubrique Biberons de Noémie de la feuille à problèmes n°15. Elle a été conçue en collaboration avec l'équipe concepteur du rallye par trois collègues PCL2 présents au moment de la fête : Séverine Brunat, Sophie Bonjour, Maël Lefort. Ce sont ces stagiaires qui ont eu l'idée de réaliser les stands et rédigé les instructions.

Comme pour les autres épreuves, il y avait sur le même thème 2 types de stands, une demi-classe passait par le premier stand, l'autre par le deuxième. Chaque épreuve durait 15 minutes.

Description des stands « biberons »

Stand : les biberons : consignes groupe « 1 »

Matériel :

- 4 biberons opaques par stand.
- 5 billes par biberon de 2 couleurs différentes (bleue ou jaune)

Consigne pour les élèves :

Vous disposez de quatre biberons contenant chacun 5 billes qui sont de deux couleurs différentes : bleue ou jaune. Chaque biberon contient le même nombre de billes de chaque couleur.

En retournant un biberon vous pouvez voir la couleur d'une des billes qu'il contient.

Sans ouvrir les biberons, déterminer le nombre de billes bleues que contient un biberon.

Vous pouvez vous servir de crayon, papier et calculatrice.

L'expérimentation est limitée à 15 minutes au maximum.

Stand : les biberons : consignes groupe « 2 »

Matériel :

- 2 couples de biberons opaques appelés A et B d'une part et C et D d'autre part.
- 5 billes par biberon de 2 couleurs différentes (bleue ou jaune)

Consigne pour les élèves :

Vous disposez de deux biberons nommés A et B d'une part; deux biberons nommés C et D d'autre part. Ces biberons contiennent 5 billes bleues ou jaunes.

En retournant un biberon vous pouvez voir la couleur d'une des billes qu'il contient.

Sans ouvrir les biberons, déterminer si les biberons A et B ont la même composition.

Faire de même avec les biberons C et D.

Vous pouvez vous servir de crayon, papier et calculatrice.

L'expérimentation est limitée à 15 minutes au maximum.

Consigne générale aux profs-animateurs :

Chaque groupe d'élève dispose de 4 biberons contenant chacun 5 billes, des jaunes et des bleues, dont une seule à la fois peut être vue.

Au bout de 15 minutes au maximum d'expérimentation, les élèves doivent donner leurs réponses. Les élèves n'ont pas le droit d'ouvrir les biberons. Le résultat de l'expérimentation sera écrit sur une feuille d'évaluation au stand. De plus les responsables du stand demandent leur stratégie aux élèves et l'écrivent en quelques mots sur la même feuille. (En cas d'égalité au moment de l'évaluation, la meilleure stratégie sera récompensée).

Préparation des stands :

Pour le stand n°1, nous avons choisi de mettre dans chacun des biberons, 2 billes bleues et 3 billes jaunes.

Pour le stand n°2, les biberons A et B avaient la même composition (2 billes bleues et 3 billes jaunes) et les biberons C et D avaient des compositions différentes (4 billes bleues et 1 bille jaune pour C et 3 billes bleues et 2 billes jaunes pour D)

Ces choix (nombre de billes bleues, nombre de billes total) avaient été fixés à partir des différentes simulations et calculs que nous avons fait pour la feuille à problème n°15, dans l'article "Le biberon de Noémie". Nous voulions que dans ce contexte de jeu les élèves puissent donner une réponse exacte avec un nombre raisonnable d'essais.



Place du problème dans les progressions :

La notion de probabilité a été introduite dans le nouveau programme de troisième appliqué à la rentrée 2008. Les instructions stipulent que dans certaines situations, les probabilités peuvent être approximativement évaluées par les fréquences observées expérimentalement.

La majorité des classes de troisième participant à la fête semblaient avoir traité ce chapitre.

Au programme de seconde (en vigueur en 2008-2009), seules les simulations d'expériences, la notion de hasard et les fluctuations d'échantillonnage étaient au programme.

Je n'ai pas réussi à déterminer si toutes les classes de seconde avaient abordé ces notions.

(Remarque : cette année (rentrée 2009) en classe de seconde, les notions citées ci-dessus sont de nouveau au programme, et il a été rajouté la notion de probabilité dans la continuité du programme de troisième)

En seconde bac pro lycée professionnel, dans la partie statistiques et probabilités, on étudie la fluctuation d'une fréquence relative à un caractère sur des échantillons de taille n et la stabilisation des fréquences vers la probabilité de l'événement quand n augmente.



Quelques observations sur le déroulement général

L'épreuve a malheureusement été faussée par deux phénomènes !

- Certaines stratégies de groupes classes ont été induites par les enseignants accompagnateurs
Par exemple, un groupe a trouvé la réponse ainsi : Dirigés par leur professeur, les élèves ont fait 4 fois 20 essais. C'est de plus l'enseignante qui a faits les calculs de fréquences. Les élèves ont réussi à conclure mais ne se sont pas beaucoup posés de questions.
- Certains biberons n'étaient pas complètement opaques. Et des élèves ont réussi à regarder à l'intérieur (à travers la tétine transparente) pour déterminer le nombre de billes bleues.

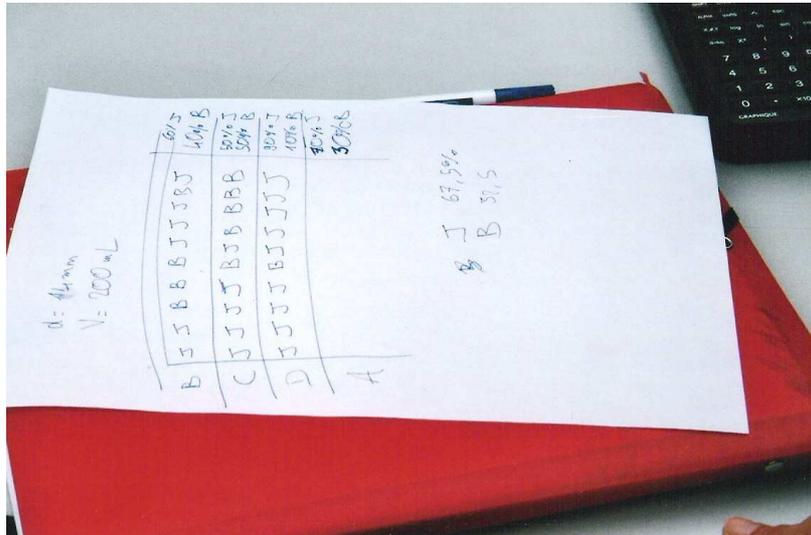


Observations de l'épreuve biberon n°1 : composition d'un biberon.

Tous les groupes-classes ont trouvé la bonne composition.

Après quelques instants de réflexion, les groupes comprennent majoritairement qu'il faut faire des statistiques pour en déduire les résultats.

Les élèves font dans l'ensemble assez peu d'essais : ainsi un groupe d'élèves conclut au résultat au bout d'une vingtaine d'essais. Ils disent avoir l'impression qu'il y a plus de billes jaunes que de billes bleues. Ils trouvent alors la bonne proportion.



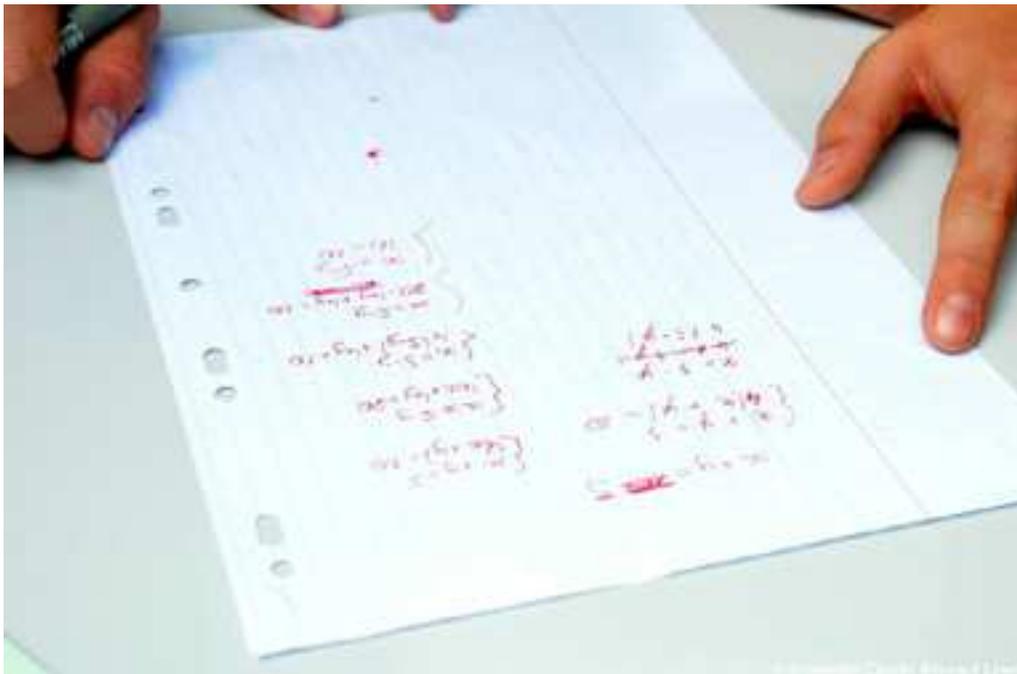
- Un groupe de lycée fait beaucoup d'essais mais ne prend aucune note. Leur stratégie les amène à faire des expériences simultanées sur les 4 biberons. Il y a ainsi environ 4x20 expériences. Il n'y a pas de compte de fait mais seule l'impression qu'il y a plus de billes jaunes fait décider au groupe qu'il y a 3 billes jaunes dans le biberon.
- Un groupe de collège qui avait traité le chapitre des probabilités, tout particulièrement la loi des grands nombres, a utilisé une stratégie proche de celle que nous attendions. Le groupe se partage en 4; les élèves prennent des notes; ils calculent après leurs expériences le pourcentage de billes jaunes; leur résultat est proche de 60%. Ce qui les amène à conclure sur la composition.



©Eric.Le Roux/Communication/UCBL

- Deux classes (une de lycée et une de collège) pensent de leur côté à résoudre des systèmes. La classe de lycée a écrit $x + y = 20$ (20 représentant le nombre de billes jaunes et bleues contenues sur l'ensemble des 4 biberons). Ce groupe ne montrait pas beaucoup de motivation et ils ont obtenu leur réponse en regardant à travers le goulot. Le groupe de collège a écrit le système suivant : . Après de longs calculs qui ne menaient nulle part, l'idée de faire des statistiques a été évoquée et dans le peu de temps qui leur restaient, les élèves ont consciencieusement pris des notes de leurs expériences puis fait les calculs adéquats.

Pour étayer leurs statistiques, certains élèves ont essayé de différencier les billes entre elles grâce à leur marbrure.



©Eric.Le Roux/Communication/UCBL



Observations de l'épreuve biberon 2

(Cette épreuve a été mieux observée car j'y ai été plus présente)

Pour cette épreuve, les réponses données n'ont pas été toujours exactes.

La stratégie de la plupart des groupes (très souvent séparés en 2 pour statuer sur chaque couple de biberons) a été de chercher la composition de chaque biberon plutôt que de comparer les tirages.



Classe 1-Lycée

Question immédiate d'une élève : combien de fois on a le droit de retourner ?

La classe se sépare en deux groupes avec chacun deux biberons. Dans le premier, les élèves font des essais désordonnés, puis posent les biberons et discutent : une élève dénombre tous les cas possibles pour la composition.

Dans le second, deux élèves font un tirage systématique, l'un notant au fur et à mesure. Plusieurs essaient de regarder par le goulot. Au bout d'un moment ils tentent de repérer des différences entre les billes bleues. Conclusion : il y a au moins 2 bleues.

10 minutes après le début, les deux groupes se mettent à chercher activement la composition de chaque biberon.



Classe 2-Collège

Réactions immédiates : "c'est de la proba" et " on peut toujours tomber sur la même bille".

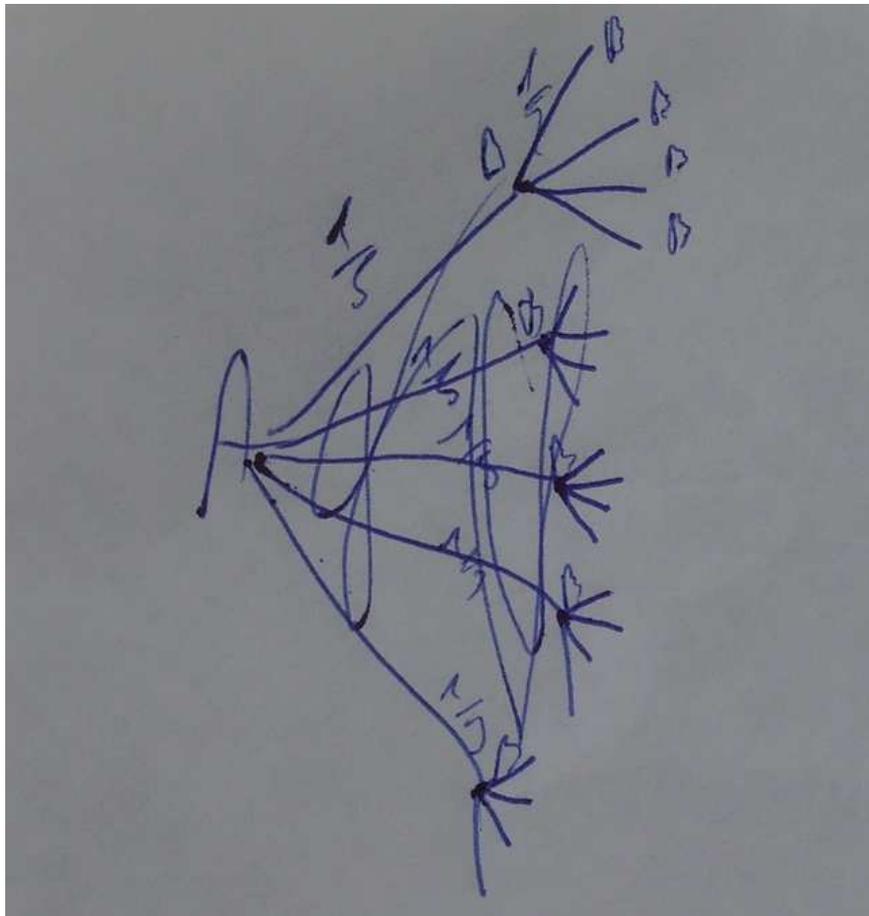
L'accompagnant est un surveillant qui fait du soutien en math, et il intervient, d'abord pour réexpliquer le problème à quelques élèves qui n'ont rien compris. Il induit ensuite la recherche, en disant : "c'est ce qu'on a fait" mais cela oriente apparemment les élèves vers des arbres de dénombrement.

Un élève fait 5 tirages, annonce le résultat et retourne encore le biberon ; son voisin lui dit : "mais pourquoi t'en fais plus ?" (plus au sens de « encore »)

Plusieurs se lancent dans l'écriture d'arbres de dénombrement.

L'un a l'air sûr de lui : "tu as 1 chance sur 5 d'avoir ceci, 2 chances sur 5 d'avoir cela..."

et il dissuade quelques autres de faire des tirages : "on s'en fout de retourner les biberons, si tu tombes 50 fois sur la même, ce n'est pas fiable, il faut calculer..."



Au bout de 10 min la classe rend sa réponse : composition identique pour les 2 paires. Leur logique est qu'ils doivent faire les mêmes arbres pour chaque biberon.

Après que les élèves aient donné leur réponse, les responsables de stand essaient de discuter avec l'élève leader du groupe qui a bloqué les essais. Il répète ses "arguments". Pour lui n'importe quelle composition peut sortir, y compris si l'on fait 100 essais, donc on ne peut avoir aucune certitude.

Il y a contresens complet sur ce qu'est un calcul de probabilité : le calcul est sensé donner la certitude.

Classe 3-Lycée

Une élève est leader reconnue et prend les choses en main dès le début. Elle réexplique l'énoncé puis répartit les élèves en 4 groupes avec chacun un biberon et la consigne de « faire des probas »

Le terme « probas » est employé et reconnu comme signifiant « statistiques » : dans chaque groupe les élèves font des tirages et notent les sorties. Mais un certain nombre ont perdu de vue le but de l'expérience : un groupe rend son résultat mais a oublié quel biberon il avait en charge ! Trois minutes avant la fin, les élèves se regroupent et le leader tire les (bonnes) conclusions.

Classe 4-Collège

La classe se divise immédiatement en deux, et chaque groupe entreprend des tirages systématiques. A chaque fois, deux élèves expérimentent, les autres suivent l'évolution des fréquences.

Une élève vient donner la réponse et explique sa stratégie : Pour les biberons C et D, on a fait à peu près 100 essais pour chaque biberon. On a trouvé 90 jaunes contre 10 bleues, donc il y a 4 jaunes et 1 bleue dans chaque biberon.

On peut remarquer que ce groupe au fonctionnement "idéal" a donné une réponse fausse Les élèves ont bien faits une centaine d'essais (confirmation après l'épreuve de leur professeur) donc soit ils ont vraiment joué de malchance, soit ils se sont trompés en compilant les résultats (les élèves se relayaient pour les tirages).



©Eric.Le Roux/Communication/UCBL

Classe 5-Lycée

Cette classe s'organise de la même façon que la classe précédente et semble avoir un raisonnement correct puisqu'on a entendu cette remarque après quelques essais : « Il y a plus de jaunes que de bleues, statistiquement. »

Seulement à la fin, quand leur stratégie leur est demandée, leur réponse est : "on a réussi à distinguer les billes d'une même couleur grâce à leurs marbrures, grâce aux dessins, et puis il y avait une bille avec un « pok » !!"

Classe 6-Collège

De nouveau, les élèves se séparent en 2 groupes. Un des groupes essaie de différencier les billes, l'autre remarque des fréquences de couleurs différentes. Mais ils ne font pas de calculs.

Classe 7-Lycée

La stratégie des calculs de fréquences semble assez rapidement adoptée. Séparés en deux groupes, les élèves font des essais. Le 1er groupe décide de faire des séries de 5. Et par l'étude de ces séries de 5 essais, ils concluent. Le deuxième groupe ne fait qu'une longue série pour chaque biberon. Au bout d'une vingtaine de tirages, le calcul des fréquences n'a pas semblé convaincant. Les élèves ont alors décidé d'en faire davantage pour conclure.



©Eric.Le Roux/Communication/UCBL

Classe 8-Lycée

Le couple des biberons A et B est traité par une partie des élèves qui essaie de différencier les billes. Cette stratégie n'a pas payé ici car le groupe a rendu une mauvaise réponse.

Les autres élèves essaient de trouver les compositions des biberons C et D. Les tirages du biberon C leur font penser que sa composition est 1 jaune/4 bleues au bout d'une vingtaine d'essais. Ils s'intéressent ensuite au biberon D. Les élèves comptabilisent alors les résultats. Les 20 premiers tirages ne les convainquent pas, ils décident alors d'en faire davantage : 30 puis 50. Leur (bonne) conclusion en découle.



Conclusion

Au niveau matériel, un changement de modèle est souhaitable. Le modèle choisi est à revoir pour plusieurs raisons :

Tout d'abord, certains biberons n'étaient pas assez opaques.

De plus, il n'était pas prévu que les billes s'entrechoquant puissent se casser (c'est arrivé deux fois le 12 mai, heureusement, il y avait des billes de remplacement).

Dernier point, les billes choisies étaient distinctes par leurs marbrures.

Au lieu de biberons, on pourrait choisir des bouteilles de lait ou de crème fraîche et on garderait les tétines en les faisant dépasser juste de ce qu'il faut du bouchon des bouteilles. Il faudra seulement découper les bouchons de manière adéquate. Reste le problème des billes : il vaut mieux prendre des perles rondes en plastique ou en bois, identiques et incassables.

Pour une interprétation plus fine des stratégies déployées, on aurait pu demander à chaque groupe de remplir une petite fiche avec les questions suivantes :

- Combien de tirages avez-vous fait pour chaque biberon ? (on aurait eu : quelques uns, je ne sais pas, 100, 20...)
- Qu'est-ce qui vous a permis de donner la réponse ?
- Etes-vous sûr de votre réponse ? ou : noter de 1 à 5 votre degré de certitude.

Ce stand du rallye a montré que certains élèves confondaient les notions de statistiques et de probabilités. L'importance accrue de ces notions dans nos programmes montre l'intérêt de combattre ces confusions.

On pourrait attendre davantage d'approfondissement des réflexions dans un cadre classe, avec un contrat plus rigoureux. Ce petit exercice montre seulement les premières interrogations des élèves.

Ces problèmes assez ludiques peuvent alors constituer une activité d'introduction aux fluctuations d'échantillonnage et à la notion de probabilité comme limite des fréquences lorsque le nombre d'expériences tend vers $+\infty$.

Ils peuvent être la source de davantage de réflexions si le nombre de billes est augmenté, car la conclusion est plus délicate à déterminer et c'est cela qui peut amener à un véritable débat.

On pourra être amené alors à évoquer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% pour un échantillon de taille n (intervalle du type $[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$) notion qu'il est proposé d'introduire dans le programme de 2^{nde} applicable à la rentrée 2009.

Post-scriptum

Les photos de ce document ne sont pas placées nécessairement en correspondance avec les observations.

Certaines de ces photos viennent de la photothèque de l'UCBL. Elles ont été prises par le photographe Eric Le roux.