Le musée

Les contraintes.

On demande à un architecte de concevoir les plans d'un futur musée. Le musée exposera essentiellement des peintures qui seront suspendues aux murs de couloirs.

Une contrainte : les visiteurs doivent pouvoir circuler dans tous les couloirs où sont exposés les oeuvres sans repasser deux fois par un même couloir.

En d'autres termes le graphe, dont les arêtes sont les couloirs et les sommets les carrefours, doit être eulérien.

Problème : si l'on déambule au hasard sur un graphe eulérien avec pour seule stratégie de ne pas emprunter un couloir déjà pris, on se retrouvera au bout d'un moment bloqué au point de départ (donc à l'entrée/sortie du musée) mais en général en n'ayant pas parcouru tous les couloirs.

Or le directeur du musée, pour des raisons artistiques indiscutables, refuse que des pancartes imposent le parcours . . . L'architecte doit donc proposer un plan de musée tel que toute personne partant de l'entrée du musée et déambulant au hasard, en s'interdisant seulement d'emprunter un couloir déjà visité, puisse admirer toutes les oeuvres et finir à son point de départ (pour pouvoir ressortir).

CN.

Soit G un graphe possédant la propriété voulue, c'est à dire tel que toute chaîne simple de départ ω (l'entrée du musée) continuée jusqu'à un point de blocage (c'est à dire un sommet-carrefour tel que tous les couloirs-arêtes incidents à ce carrefour sont déjà empruntés par la chaîne) est en fait un cycle eulérien (*un tel graphe est dit aléatoirement eulérien en ω*). Effaçons ω ainsi que tous les couloirs partant de cette entrée. Alors le graphe F obtenu est une forêt (c'est à dire un graphe sans cycle).

preuve

Par l'absurde. Supposons qu'un visiteur puisse parcourir un cycle ne passant pas par ω , il peut alors parcourir un cycle élémentaire ne passant pas par ω (cf ??)

$$C = (s_0, s_1, \dots, s_n, s_0)$$

Dans G , il existe une chaîne de ω à s_0 (puisque'on peut visiter tout le musée en partant de l'entrée ω) dont on peut extraire une chaîne élémentaire de ω à s_0 (cf ??) : $(\omega, t_1, t_2, \dots, t_p, s_0)$. Soit t_j le premier sommet de cette chaîne appartenant au cycle C , il existe un indice i tel que $t_j = s_i$. Considérons alors la chaîne simple

$$P' = (\omega, t_1, t_2, \dots, t_{j-1}, t_j = s_i, s_{i+1}, s_{i+2}, \dots, s_n, s_0, s_1, \dots, s_{i-1}, s_i)$$

et continuons la jusqu'à ce que notre visiteur se retrouve bloqué (c'est à dire se retrouve à un carrefour incident à des couloirs tous déjà empruntés). On obtient une chaîne simple C' qui est un cycle eulérien (puisque le plan du musée est censé avoir cette propriété) :

$$C' = (\omega, t_1, t_2, \dots, t_{j-1}, t_j = s_i, s_{i+1}, s_{i+2}, \dots, s_n, s_0, s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, v_1, v_2, \dots, v_q, \omega)$$

Si notre visiteur parcourt la chaîne simple :

$$C'' = (\omega, t_1, t_2, \dots, t_{j-1}, t_j = s_i, v_1, v_2, \dots, v_q, \omega)$$

il se retrouvera également bloqué en ω (on a en effet uniquement supprimé les sommets et arêtes du cycle C , qui ne contient pas ω : les arêtes incidentes à ω sont donc toutes utilisées dans C'' comme dans C'). On a ainsi un parcours de visiteur partant de ω et aboutissant en ω avec blocage en ω sans avoir parcouru tous les couloirs du musée. Contradiction.

CS.

On dessine des arbres (c'est à dire des graphes connexes sans cycle), on dessine ensuite un nouveau sommet ω et on relie ω à tous les sommets impairs des arbres. On se propose de montrer qu'un tel graphe peut servir de plan à notre musée, ω désignant l'entrée. Un visiteur parcourt le musée-graphe ainsi défini en empruntant les couloirs au hasard et en s'interdisant de passer par un couloir déjà visité.

1. Le graphe obtenu est eulérien (il existe donc au moins une façon de parcourir tous les couloirs du musée sans repasser par un même couloir).
2. Notre visiteur ne peut pas passer deux fois par un sommet $a \neq \omega$ sans être repassé par ω .
3. Si notre visiteur est bloqué à un moment donné dans sa visite, ce ne peut être qu'à l'entrée ω .
4. Lorsque notre visiteur sera bloqué en ω , ce sera en fait parce qu'il aura tout visité.

Résolution

Soit F la forêt définie par nos arbres (graphe dont les composantes connexes sont les arbres de l'énoncé). Notons G le graphe obtenu en ajoutant un sommet ω et les arêtes reliant ω aux sommets impairs de F .

1. Montrons que le graphe est eulérien.
 - (a) Le graphe G est connexe puisque chaque arbre (c'est à dire chaque composante connexe) de la forêt a au moins un sommet impair (un arbre a en effet toujours au moins un sommet impair sinon il serait pair et connexe donc eulérien et aurait donc un cycle) et toutes les composantes connexes de F seront donc reliées à ω .
 - (b) Le nombre de sommets impairs de la forêt F est pair (comme dans tout graphe). Le sommet ω sera donc pair, ainsi que tous les sommets impairs de F puisqu'on leur ajoute une arête.
 - (c) Ainsi G est connexe et pair : c'est un graphe eulérien.
2. Si le visiteur passe deux fois par le sommet a sans repasser par ω , il a donc parcouru un cycle ne passant pas par ω . Un tel cycle serait donc un cycle de F ...ce qui est absurde puisque F est une forêt.
3. Supposons que le visiteur se trouve en un sommet a . Si ce sommet a n'est pas son point de départ ω , à chaque passage en a le visiteur "épuise" deux couloirs aboutissant en a : le couloir par lequel il est arrivé et le couloir par lequel il repart. S'il vient d'arriver en a , il a donc épuisé un nombre impair de couloirs incidents à a : les couloirs des éventuels passages précédents en a et le couloir par lequel il vient d'arriver. Comme le

nombre de couloirs incidents à a est pair (par construction du graphe), notre visiteur peut repartir. . . Ainsi en un autre sommet que ω , le visiteur n'est jamais bloqué et ce ne peut donc être qu'en ω qu'un visiteur se trouve sans "nouveau" couloir possible.

Remarque. Pour ω , ce qui fait que l'argument précédent ne tient pas, c'est qu'au départ on part de ω sans y être arrivé. En supposant qu'on efface les couloirs au fur et à mesure qu'on les emprunte, on rend ainsi ω impair en le quittant, alors que les autres sommets deviennent impairs en y arrivant et redeviennent pairs lorsqu'on les quitte.

4. Supposons que notre amateur d'art se retrouve bloqué (donc en ω) sans avoir parcouru tous les couloirs.

(a) Pour chaque carrefour(=sommet du graphe),le nombre de couloirs incidents à ce carrefour et déjà utilisés par notre visiteur est pair. En effet, le raisonnement fait ci-dessus le montre pour un sommet $a \neq \omega$. Pour ω : on est bloqué en ω , on vient donc d'arriver en ω , ce qui rend pair à nouveau ω (le couloir que l'on vient d'"effacer" en arrivant "compense" le couloir effacé au départ qui rendait impair ω).

(b) Chaque sommet était incident à un nombre pair de couloirs au départ, le parcours du visiteur a effacé en chaque sommet un nombre pair de couloirs. Chaque sommet est donc encore incident à un nombre pair de couloirs après avoir effacé les couloirs du parcours effectué. Les composantes connexes du graphe restant (constitué de tous les sommets de G et des arêtes non encore effacées) sont donc des cycles de G (car sous-graphes connexes et pairs donc eulériens). Mais ce serait donc des cycles de F (on est en effet bloqué en ω , il ne reste donc plus de couloirs incidents à ω) . . .or F , par construction, n'a pas de cycle de longueur non nulle. Il ne reste donc que des sommets isolés et notre visiteur, lorsqu'il est bloqué en ω , peut ressortir satisfait : il a en fait tout vu.