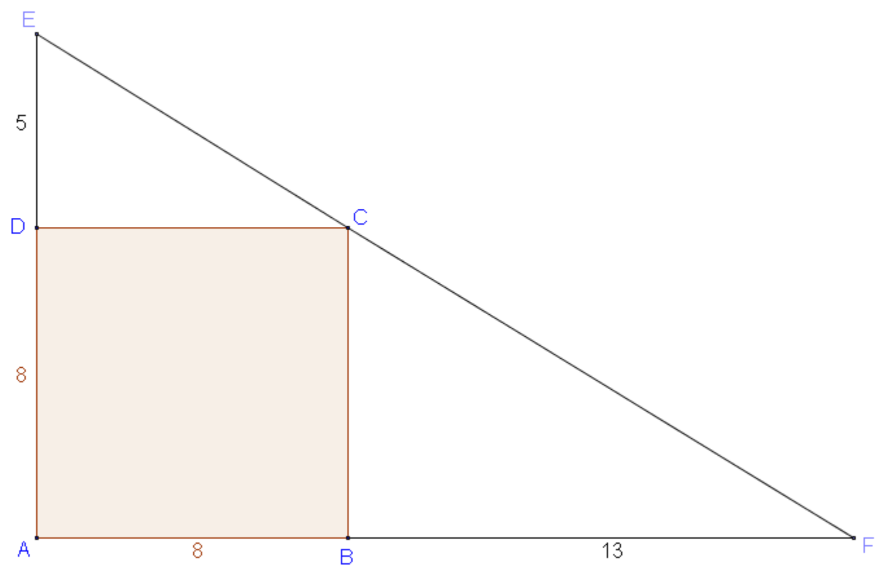
Extrait du mémoire IUFM de Nathalie Marc (2004-2005)

Donner un sens à la démonstration

….

1.1.1.1. Enoncé

ABCD est un carré de côté 8 cm. F est le point de la demi-droite [AB) tel que BF = 13 cm. E est le point de la demi droite [AD) tel que DE = 5 cm. Que peut-on dire des points E, C, F ? J'ai trouvé trois méthodes. Qui dit mieux ?



Nous avons trouvé l'idée de cet énoncé dans le fascicule de l'IREM de Lyon : « Activités pour les modules de seconde ». Toutefois, nous l'avons un peu modifié : en effet, dans ce fascicule, on ne proposait pas un dessin à l'échelle mais un dessin à main levée, avec les mesures des côtés reportées sur le dessin, sans autre explication. Nous expliquerons les raisons de ce changement dans l'analyse a priori.

1.1.1.2. Organisation de la séance

Pour cette expérimentation, nous travaillerons encore pendant les heures de module, mais cette fois nous ne procéderons pas de la même manière pour les deux groupes. Les élèves du premier groupe de module serons placés en groupes homogènes dès le début de la séance, avec pour consigne de travailler seuls pendant 10 minutes, puis de discuter au sein du groupe de leurs conclusions concernant la position des points E, C, F, et des différences éventuelles entre les élèves. Une fois que tous les élèves serons convaincus par la même conclusion (points alignés ou pas), le but est de trouver le plus de méthodes possibles. Ils auront jusqu'à la fin de l'heure pour réfléchir en groupe (pas de présentation sur affiche), puis on leur demandera à chacun de rédiger deux démonstrations différentes pour la semaine suivante.

Concernant le deuxième groupe de modules, nous ne placerons pas tout de suite les élèves par groupes de quatre, mais nous prévoyons de les « éparpiller »dans la salle durant les 10 premières minutes, et ceci pour deux raisons : tout d'abord pour qu'ils travaillent calmement au début et soient moins agités pour le reste de l'heure (en effet, lors de la première expérimentation, ce groupe avait mis un certain temps à se mettre au travail, et avait été plus difficile à gérer que le premier) ; de plus, nous pourrons ainsi créer les groupes en tenant compte des conclusions des élèves, et à faire se confronter au sein d'un même groupe des opinions divergentes. Pour la suite, l'organisation sera la même que pour le premier groupe.

1.1.2. Analyse a priori

Les objectifs de cette séance sont les suivants :

- insister sur le fait qu'on ne peut se contenter d'une observation sur un dessin comme preuve, en montrant de plus aux élèves que cet outil peut se révéler trompeur ;
- mettre en garde les élèves contre les preuves basées sur des valeurs approchées ;
- montrer aux élèves qu'il existe en général plusieurs méthodes menant au même résultat ;
- leur faire prendre conscience du fait qu'une démonstration valide ne peut conduire qu'à la vérité (et donc que si deux preuves différentes les conduisent à des résultats contradictoires, une des deux doit contenir une erreur).

C'est pour atteindre le premier de ces objectifs que nous avons en partie modifié l'énoncé initial du problème : tout d'abord, afin de mettre en garde les élèves contre les constats sur le dessin, nous avons, comme dans la première expérimentation, préféré donner un dessin à l'échelle dans l'énoncé, plutôt que de voir les élèves se lancer dans des débats concernant la précision de leur tracé : en effet, les élèves peuvent rapidement vérifier que les mesures sur le dessin correspondent bien aux hypothèses de l'énoncé, et nous pensons que leur confiance dans le travail du professeur les empêchera de se poser des questions sur la « justesse » du tracé. Ils seront encore plus convaincus à la fin de la séance que parfois, on ne peut pas voir un résultat sur un dessin, même effectué avec la plus grande précision (par exemple lorsque la différence se joue au dixième de millimètre). Dans l'énoncé proposé par l'IREM de Lyon, les élèves devaient d'abord chercher le problème en DM : ils avaient donc le temps de faire un dessin avec précision, puis d'élaborer une démonstration leur permettant de se convaincre du résultat. De plus, n'ayant ajouté aucune explication au dessin, il fallait que les élèves se demandent comment était fait le dessin, qu'est-ce qui était construit en premier, quelles étaient les hypothèses exactes ; et c'est en refaisant eux-mêmes le dessin qu'ils pouvaient le comprendre. Cela étant, par souci de temps et pour les raisons expliquées précédemment, nous avons choisi de faire nous mêmes le dessin avec précision et de donner les explications dans l'énoncé. Nous pensons que les données sont assez simples pour que les élèves se plongent rapidement dans l'énoncé.

Concernant les mesures choisies pour les côtés, nous avons suivi l'énoncé initial, puisque il permettait d'obtenir une configuration dans laquelle les points E, C, F ont l'air d'être alignés. L'avantage de ces nombres est aussi que lorsqu'on cherche à calculer les longueurs EC, CF, ou EF, on obtient des valeurs approchées qui peuvent faire aboutir à des conclusions erronées ; ainsi, dans les groupes vont naître des débats concernant la validité des résultats obtenus avec des valeurs approchées.

Les dernières phrases de l'énoncé : « J'ai trouvé trois méthodes. Qui dit mieux ? » permettent de lancer un défi aux élèves, et de les motiver pour trouver plusieurs méthodes différentes. Car c'est en confrontant des méthodes différentes que vont apparaître les conclusions opposées, et donc les débats.

L'avantage de cette configuration est que les élèves peuvent utiliser toutes sortes d'outils : tout d'abord, à la vue des triangles rectangles, les élèves vont appliquer le théorème de Pythagore, peut être sans réfléchir ; nous ne sommes pas sûrs qu’ils saisissent tous en quoi ce théorème leur permet de démontrer si les points sont alignés ou non. De même pour le théorème de Thalès : appliqué dans le sens direct, il ne permet pas de conclure ; c’est sa contraposée (ou un raisonnement par l’absurde) qui permet de dire que les points ne sont pas alignés, mais encore faut-il bien voir laquelle des hypothèses du théorème n’est pas vérifiée. Nous attendons donc les démonstrations pour voir comment les élèves vont s’en sortir. Une autre méthode va certainement être rapidement utilisée : la géométrie analytique. En se plaçant dans un repère orthogonal (ou même orthonormé), les élèves peuvent dire si le point C appartient à la droite (EF) en déterminant une équation de cette droite, ou encore si les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires. Cette méthode aura d’autant plus de succès qu’on vient de terminer avec cette classe le cours sur la géométrie analytique. Enfin, deux dernières méthodes sont possibles, mais nous paraissent moins probables que les autres : celle qui consiste à calculer la somme des aires de ABCD, BCF, CDE, et à voir si elle coïncide avec celle de AEF ; et celle qui consiste à calculer les angles $\widehat{AEF}$ et $\widehat{BCF}$ avec les relations trigonométriques, et à comparer ces deux angles.

1.1.3. Déroulement de la séance :

Contrairement à ce que nous pensions, certains élèves ont eu du mal à se lancer dans le problème, et nous ont appelés pour nous dire : « Je comprends pas ce qu’il faut faire. ». Etonnés, nous leur avons alors demandé ce que disait l’énoncé : « Que peut-on dire des points E, C, F ? Ben ils sont alignés. C’est tout ce qu’il faut faire ? ». Nous ne les avons pas contredits, mais nous avons essayé de leur faire dire qu’on ne pouvait pas affirmer une propriété constatée sur le dessin, qu’il fallait la démontrer ; nous pensions que la première expérimentation avait suffit à les convaincre, mais dans cet exercice il semblait impossible pour les élèves de remettre en cause le dessin. Ils se sont donc lancés dans des démonstrations pour nous faire plaisir.

Au bout de 5 minutes, tous les élèves sont plongés dans la recherche d’une preuve, avec la certitude que les points sont alignés. D’ailleurs la majorité des brouillons commencent par la phrase : « Les points E, C, F sont alignés : ».

Beaucoup pensent à utiliser les théorèmes de Pythagore et de Thalès, mais ne parviennent pas à conclure sur l’alignement de points. D’autres comprennent comment utiliser le théorème de Pythagore, et parviennent à la conclusion que les points sont alignés à cause des valeurs approchées. Quelques élèves appliquent le théorème de Thalès (en vérifiant seulement l'hypothèse concernant le parallélisme), et trouvent que les rapports $\frac{EB}{EA}$ et $\frac{BC}{AF}$ sont égaux en arrondissant au centième, et concluent alors à l'alignement des points.

Une seule élève utilise la méthode des aires, mais même après avoir trouvé que cette méthode la conduisait au non alignement des points, elle semble se refuser à écrire une conclusion en contradiction avec ce qu'elle voit, et cherche une autre méthode.

Enfin, certains se souviennent des chapitres qu'ils viennent d'étudier et utilisent un repère le plus souvent orthonormal ; ils calculent alors les coordonnées des vecteurs et utilisent la formule sur la colinéarité, ou déterminent l'équation de la droite (EF) et regardent si les coordonnées de C vérifient l'équation. Et à leur grande surprise, ils n'obtiennent pas le résultat attendu. Cependant, ils ne doutent toujours pas du dessin, et refont leurs calculs ; ils nous appellent et nous « accusent » de leur avoir donné un exercice « truqué » ! Ils ne comprennent pas pourquoi leur preuve n'aboutit pas à la conclusion attendue : « C'est pas normal, ils sont alignés, ça se voit. Il y a un piège ! ». Un élève suggère alors que les points ne sont peut-être pas alignés, mais aussitôt ceux qui l'ont entendu le contredisent, et tous se relancent dans les calculs, ou cherchent une autre méthode.

Au bout de 10 minutes environ, les élèves peuvent discuter en groupe. C'est à ce moment là que certains élèves commencent à réaliser que les points ne sont pas alignés. Dans certains groupes, tous se mettent rapidement d'accord car toutes les méthodes trouvées pendant la phase de recherche individuelle convergent vers la même conclusion. Cependant, quelques élèves ont besoin de refaire le dessin, en « inclinant » un peu la droite (EC) par rapport à la droite (CF), pour être vraiment convaincus. Une élève refuse même de croire à cette conclusion, après avoir lu deux démonstrations irréfutables (une démonstration avec les vecteurs colinéaires, l'autre avec les aires). Elle nous a déclaré comprendre les démonstrations, être d'accord pour les valider, mais ne veut pas accepter le fait que les points ne sont pas alignés : « Je préfère faire confiance à mes yeux ».

Enfin, nous assistons à des débats dans trois groupes : dans chacun des cas, un élève a utilisé les coordonnées pour prouver que les points ne sont pas alignés, et d'autres pensent avoir démontré le contraire en utilisant le théorème de Pythagore. Dans un premier temps, ils s'assurent tous de la validité des preuves des autres, et ne voient pas forcément le problème de la valeur approchée. Finalement, dans un des groupes le problème est résolu car les élèves utilisent une calculatrice par calcul, et comparent les résultats directement sur le cadran de la calculatrice (au lieu de les recopier et de ne garder que 4 décimales) : ils s'aperçoivent ainsi que les nombres qu'ils pensaient égaux sont différents. Dans les deux autres groupes, nous voyons que les élèves n'avancent plus, et nous les interrogeons pour leur faire réaliser d'où peut venir la contradiction.

Au bout d'un certain temps, tous les groupes savent que les points ne sont pas alignés, et essaient de trouver un maximum de méthodes ; tous en trouvent au moins 3, et deux groupes parviennent à trouver toutes les preuves auxquelles nous avions pensé, avec toutefois des imprécisions concernant la preuve utilisant le théorème de Thalès.

A ce propos, nous pouvons dire quelques mots sur les démonstrations proposées par les élèves, que ce soit lors de leur recherche en classe, ou dans les copies qu'ils nous ont rendues la semaine suivante.

Tout d'abord, quelques chiffres : 8 groupes ont pensé à utiliser le théorème de Pythagore, 7 ont utilisé les vecteurs colinéaires, 6 le théorème de Thalès, 5 ont calculé les aires des différents polygones, 4 sont passés par les équations de droite, et enfin 2 seulement ont pensé aux relations trigonométriques.

Dans l'ensemble, les preuves utilisant les repères, la trigonométrie et les aires n'ont pas posé de problème particulier. Concernant l'utilisation des repères, que ce soit avec la formule sur la colinéarité de deux vecteurs, ou avec les équations de droites, le raisonnement est direct ; de plus, les chapitres portant sur ces notions sont encore frais dans l'esprit des élèves. Ceux qui ont appliqué les relations trigonométriques dans les différents rectangles ont déterminé des valeurs approchées des angles ECD et BCF, puis ont déduit une valeur approchée de l'angle ECF, et ont trouvé une valeur proche de 180,4° ; la différence avec 180° leur a semblé assez significative pour pouvoir conclure que les points ne sont pas alignés. Enfin, la méthode utilisant les aires permettait elle aussi un raisonnement direct : les élèves ont calculé les aires respectives de ABCD, ECD, BCF, les ont ajoutées, et ont comparé le résultat à l’aire de ECF.

La démonstration utilisant le théorème de Pythagore était un peu plus délicate. Nous avons tout d’abord noté des erreurs de logique au niveau de la différence entre une propriété et sa réciproque : certains écrivent : « Si EF = EC + CF alors les points sont alignés », calculent les différentes longueurs et parviennent au résultat : « EF ? EC + CF donc les points ne sont pas alignés ». Nous pensons que dans l’esprit des élèves la réciproque de la règle énoncée est claire, ils l’utilisent de façon intuitive, mais ne se rendent pas compte qu’ils n’écrivent pas ce qu’ils font réellement. On peut proposer une explication dans ce cas précis : les élèves étaient partis dans l’idée qu’ils allaient démontrer que les points étaient alignés : c’est alors bien la règle « Si EF = EC + CF alors les points sont alignés » qu’il fallait utiliser.

D’autres voient qu’il y a une contradiction, mais ne parviennent pas à l’exprimer : par exemple, une élève calcule EC et EF en utilisant le théorème de Pythagore, écrit que EF = EC + CF, puis vérifie si le triangle AEF est rectangle, en utilisant la valeur de EF qu’elle vient de calculer ; elle trouve que le carré de EF est différent de la somme des carrés de AE et AF, mais au lieu d’en déduire que son hypothèse « EF = EC + CF » est fausse, elle invoque la réciproque du théorème de Pythagore et conclut : « Le triangle n’est pas rectangle et les points ne sont pas alignés ». Les élèves ne sont pas habitués à raisonner par l’absurde, et même s’ils se rendent compte que leur raisonnement les mènent à une contradiction, ils ne parviennent pas en justifier en quoi cela leur permet de conclure.

C’est cette difficulté qu’on retrouve dans l’utilisation du théorème de Thalès : certains voient que les rapports BC / AE et FB / FA sont différents, et concluent rapidement que les points ne sont pas alignés, sans préciser que la seule hypothèse qui manque pour obtenir l’égalité des rapports par le théorème de Thalès est le fait que le point C est sur la droite (FE). D’autres essaient de justifier le passage, mais leur raisonnement n’est pas valide : par exemple, un élève montre que les rapports BC / AE et FB / FA ne sont pas égaux, et fait appel à la « réciproque du théorème de Thalès » (en fait la contraposée) pour affirmer que les droites (CB) et (AE) ne sont pas parallèles, et par suite que les points E, C, F ne sont pas alignés.

1.1.4. Analyse a posteriori

Analysons les résultats observés dans l’optique de notre problématique. Tout d’abord, il faut souligner la confiance absolue des élèves dans le dessin. Même après avoir démontré que les points ne sont pas alignés, par un raisonnement assez simple qui ne peut pas être remis en question, ils s’obstinent à penser le contraire, à croire à un exercice « truqué ». L’étonnement des élèves devant la contradiction entre ce qu’ils ont établi par un raisonnement déductif et ce qu’ils perçoivent nous semble cependant positif : ils ont au moins compris qu’une démonstration ne peut conduire qu’à la vérité ; et leur incompréhension vient du fait que la vérité dans le monde idéal des objets mathématiques n’est pas celle à laquelle ils s’attendaient à la vue du dessin. Nous pouvons donc être satisfaits au point de vue de notre quatrième objectif : la majorité des élèves donne un sens à la démonstration : c’est un outil qui permet d’aboutir à la vérité ; ils sont donc étonnés lorsqu’une démonstration n’aboutit pas à ce qu’ils pensaient être la vérité, ou lorsque deux démonstrations qu’ils pensent valides aboutissent à des résultats différents.

Par contre, l’attitude de l’élève qui continue à affirmer que les points sont alignés alors qu’elle reconnaît la validité de deux démonstrations prouvant le contraire nous pousse à nous interroger sur ce qu’elle considère comme étant « vrai ». Elle semble bien faire une distinction entre le monde abstrait des objets mathématiques, que l’on manipule avec des règles bien établies (et qu’elle sait elle-même manipuler), et le monde des perceptions ; mais elle doit considérer que l’on peut parler de vérité dans ce dernier monde, en se basant sur ce que constatent nos sens.

Dans l’ensemble, on peut dire que notre premier objectif, concernant l’insuffisance du constat sur un dessin comme outil de preuve, a été atteint : en effet, la confiance des élèves dans le dessin a été fortement ébranlée lors de cette expérimentation. Même si dans un premier temps ils se sont accrochés à l’idée que leur vue ne les trompait pas, et ont essayé de justifier la contradiction constatée en remettant le problème posé en question, ils ont finalement accepté l’insuffisance de leur outil, de leur ancien savoir. On a certainement assisté, pour la majorité de la classe en tous cas, à ce que la théorie du constructivisme appelle « la phase de déséquilibre » entre l’ancien et le nouveau savoir ; et il est compréhensible que cette phase soit un moment de désarroi pour les élèves, qui voient leurs certitudes s’effondrer.

Finalement, nous ne pensions pas que les élèves de 2nde seraient autant influencés par leur perception, mais nous pensons qu'à la suite de cette séance, ils seront plus méfiant vis à vis du dessin, et n'accorderont leur confiance qu'à un raisonnement déductif sur les objets mathématiques.

Concernant le travail sur les valeurs approchées, nous pensons là aussi que les élèves ont réalisé les limites de leur utilisation. En effet, la majorité des débats qui ont eu lieu au sein des groupes provenait du fait que ceux qui avaient arrondi les résultats de leurs calculs trouvaient les points alignés. Cependant, les raisonnement effectués pour démontrer que les points n'étaient pas alignés n'ont pas toujours été très rigoureux dans ce sens là : par exemple la preuve utilisant les relations trigonométriques aboutit à une valeur approchée de l'angle ECF, qu'on considère « assez éloignée » de 180° pour pouvoir affirmer que les points ne sont pas alignés. Mais personne n'a justifié pourquoi dans ce cas on peut faire confiance à une valeur approchée (pour être vraiment rigoureux il faudrait utiliser des encadrements). Et nous pensons que personne ne s'est posé la question, puisque la conclusion trouvée concordait avec ce qui avait été établi comme vrai. Finalement, nous pouvons supposer que les élèves ont seulement retenu qu'ils devaient adapter la finesse de la précision avec laquelle ils donnent les résultats au problème posé, et ne se posent pas vraiment la question de la validité d'un résultat utilisant des valeurs approchées.