

Plusieurs démarches pour résoudre un problème

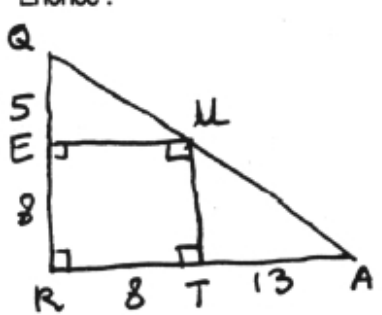
Rapport d'expérimentation de Jean-François Zucchetto, paru dans La Feuille à Problèmes n°5

J'avais pour objectifs de montrer et faire prendre conscience aux élèves :

- qu'il existe différentes méthodes qui conduisent au même résultat,
- qu'un dessin n'est pas une figure, qu'une valeur approchée n'est pas une valeur exacte et par suite que dessin et valeur approchée ne prouvent rien.

J'ai donc proposé à mes élèves de seconde, dans le cadre d'un devoir à la maison donné vers le début de l'année scolaire 91-92, un problème géométrique.

Énoncé :



Le dessin ci-contre est un dessin à main levée.
Les dimensions sont données en cm.
Que pouvez-vous dire des points Q, U et A ?

J'ai trouvé trois méthodes qui dit mieux ?

L'énoncé, donné à l'aide d'un dessin à main levée, propose d'examiner la position de trois points. Y a-t-il alignement ou non-alignement de ces points ? Le dessin conduit à la conjecture de l'alignement mais qu'en est-il vraiment ?

La quantité de démarches possibles permet de poser l'exercice en tout début d'année. Ce problème donné dans une classe de seconde est extrait d'un livre de mathématique niveau 4ème (Pythagore, p. 134, édition 88). Il utilise dans ses données numériques des termes consécutifs de la suite de Fibonacci comme dans le fameux problème de Sam Loyd qui constate, grâce à un puzzle, que $64 = 65$.

Un sujet de réflexion pour les modules en seconde

Il me semble intéressant de travailler cet énoncé dans d'autres cadres et en particulier celui des modules. Par exemple, en gardant la forme devoir à la maison, les modules peuvent permettre de faire se confronter des élèves qui, sur un même type de démarche, ont conclu soit à l'alignement, soit au non-alignement. Mais il y a sans doute d'autres approches.

Quelles sont les démarches possibles des élèves pour la résolution de ce problème ?

En supposant que tous les élèves donnent (trouvent) la bonne réponse, à savoir les points ne sont pas alignés, ils peuvent utiliser plusieurs méthodes :

- a) Calcul des aires QUE; UTRE, AUT et QRA. Confrontation et conclusion; ici les calculs utilisent des nombres décimaux et c'est ce qui était proposé dans le livre de Maths de quatrième.
- b) Utilisation du théorème de Pythagore pour calculer les hypoténuses (QU, UA et QA) des triangles et vérifier que $QU + UA > QA$ (inégalité triangulaire avec des racines carrées).
- c) Utilisation des mesures d'angles (ce qui reviendra à calculer des lignes trigonométriques).

(i) Dans le triangle QRA rectangle en R les angles $\widehat{Q}$ et $\widehat{A}$ sont complémentaires (ou le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre). On utilise alors les triangles rectangle QEU et UTA pour calculer $\sin \widehat{Q}$ et $\cos \widehat{A}$.

(ii) On vérifie si l'angle $\widehat{QUA}$ est plat. D'où avec les mêmes petits triangles on évalue les angles $\widehat{EUQ}$ et $\widehat{TUA}$.

(iii) Si des droites sont parallèles, les angles correspondants sont égaux. On compare les angles $\widehat{EQU}$ et $\widehat{TUA}$.

- d) Dans un repère (orthonormé en général) défini par $(R; \frac{1}{21} \overrightarrow{RA}; \frac{1}{13} \overrightarrow{RQ})$ on utilise deux des trois droites (QU); (UA) et (QA).

(i) On compare les coefficients directeurs des droites (on utilise aussi les pentes des droites) avec la formule : $a = \Delta y / \Delta x$.

(ii) On détermine une des équations de droites (QA) par exemple et on vérifie l'appartenance du troisième point (les équations sont données sous forme réduite ou sous forme cartésienne) à la droite (QA).

- e) Utilisation du théorème de Thalès

On suppose que U' est sur la droite (QA) et sur la droite (EU), on applique Thalès avec les droites parallèles (EU) et (RA) par exemple. On calcule EU' avec les rapports

$$\frac{EU'}{RA} = \frac{QE}{QR}.$$

$$\text{D'où } EU' = \frac{QE \times RA}{QR} = \left(5 \times \frac{21}{13} \right) \neq EU \quad \text{car} \quad \frac{5 \times 21 - 8 \times 13}{13} = \frac{1}{13}.$$

- f) Calcul vectoriel, en vérifiant la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{QA}$ et $\overrightarrow{QU}$ et en utilisant la définition de points alignés et la propriété du carré. Ainsi : $\overrightarrow{QU} = \overrightarrow{QE} + \overrightarrow{EU}$.

$$\overrightarrow{QA} = \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RA} \text{ avec } \overrightarrow{QR} = \frac{13}{5} \overrightarrow{QE} \text{ et } \overrightarrow{RA} = \frac{21}{8} \overrightarrow{EU}$$

d'où
$$\overrightarrow{QA} = \frac{13}{5} \overrightarrow{QE} + \frac{21}{8} \overrightarrow{EU}$$

or dire que les points sont alignés signifie que $\overrightarrow{QA} = k \overrightarrow{QU}$ ce qui conduit à écrire $\frac{13}{5} = \frac{21}{8}$!

- g) Utilisation de l'homothétie et de ses propriétés (à condition de l'avoir vue dès le début de l'année). On peut rapprocher de l'agrandissement ou de la réduction du programme de troisième.

Remarque : À propos de la formulation de l'énoncé

Le devoir étant donné à la maison et complété par la "consigne" suivante : "J'ai trouvé trois méthodes, qui dit mieux ?", j'ai eu la grande surprise (c'était la première fois que je posais ce type de "consigne") de constater que :

1- Beaucoup d'élèves (presque tous) m'ont donné au moins quatre méthodes. Certains sont allés bien au-delà (quand je dis "méthodes" c'est "démonstration").

2- Je n'ai pas eu l'impression de corriger 30 fois la même copie, même si la correction a été plus longue.

Les résultats obtenus

- Certains élèves ont basé leur conviction sur le dessin, à savoir que faute de précision (un seul a fait un dessin sur papier millimétré). Les points sont alignés. Les justifications, basées sur une démarche citée ci-avant étaient étayées par des calculs approchés.
- D'autres, ce qui me paraît très étonnant, ont, suivant la méthode utilisée, obtenu à l'aide d'une *preuve* des points qui sont alignés puis à l'aide d'une autre preuve des points non alignés. C'est en fait le résultat le plus surprenant que je n'aurais pas eu l'occasion de voir autrement. Ils ne se sont pas aperçus de la contradiction et de l'incohérence des résultats proposés.
- La méthode basée sur le calcul de l'aire n'est apparue qu'une fois (c'était la méthode de quatrième et au moment de la correction, certains ont eu une révélation. Comment n'y avaient-ils pas pensé ? Pour d'autres ce n'était pas une méthode digne d'un élève de seconde. Faut-il entendre que l'argumentation n'est pas sérieuse car il n'y a aucune référence au cours ?). En général, ce fut l'utilisation de Pythagore, de la trigonométrie (sous toute ses formes) mais sans utiliser le vocabulaire des angles correspondants pour le cas des droites parallèles.
- Le cas des vecteurs colinéaires est apparu mais plus pour des raisons de contrat que de conviction personnelle des élèves-auteurs car, peu de temps avant, nous l'avions étudié (à vrai dire je m'attendais peu à cette démarche).
- Certains ont mis en œuvre Thalès avec un essai de mise en œuvre d'un raisonnement par l'absurde de façon maladroite, mais il est à noter que la démarche est quand même naissante; l'ont-ils vue en quatrième ou dans les classes antérieures ? J'en doute car cette démarche est très abstraite et je ne saurais dire si elle les a vraiment convaincus ou si elles les a éclairés. Une des questions posées par un élève a été : "Si la conclusion est fausse, est-ce que cela veut dire qu'une des hypothèses est fausse ?". Question à laquelle je me suis abstenu de répondre et qui a permis de générer un débat. La démarche de l'élève s'apparente plus à un raisonnement contraposé.
- En ce qui concerne la comparaison des rapports et racines carrées (les nombres décimaux sont bien traités), le travail ne fut pas traité de manière correcte chez tous : le syndrome de la calculatrice a frappé chez la plupart ! D'où certaines conclusions erronées, car à deux décimales les résultats concordent. Par contre, un travail parfois remarquable a été fait chez certains quant à la comparaison des racines carrées :

$$a) \sqrt{89} + \sqrt{233} = \sqrt{610} \quad \text{ssi} \quad 89 + 233 + 2 \times \sqrt{20\,737} = 610$$

comme $\sqrt{20\,737}$ n'est pas un entier, la somme de $89 + 233 + 2 \times \sqrt{20\,737}$ ne peut être égale à 610.

$$b) \sqrt{89} + \sqrt{233} = \sqrt{610} \quad \text{ssi} \quad \frac{610 - 89 - 233}{2} = 20\,736 \neq 20\,737$$

- Bien sûr, j'ai rencontré l'utilisation du produit en croix pour les rapports, mais je n'ai jamais eu la réduction au même dénominateur.
- Enfin, le calcul avec des racines a conduit aussi à des formules du genre $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Conclusion

C'est un travail qui fût long à corriger mais les élèves se sont pris au jeu. À la correction, j'ai fait le point sur toutes les méthodes (les élèves prenaient des notes). La séance suivant la correction a été l'occasion de donner une interrogation de 20 minutes environ demandant :

- la comparaison de $\sqrt{89} + \sqrt{233}$ et $\sqrt{610}$
- la méthode de leur choix
- une méthode avec les angles (la comparaison des lignes trigonométriques d'angles aigus suffit à comparer les angles aigus sans passer par des valeurs approchées d'angles).