

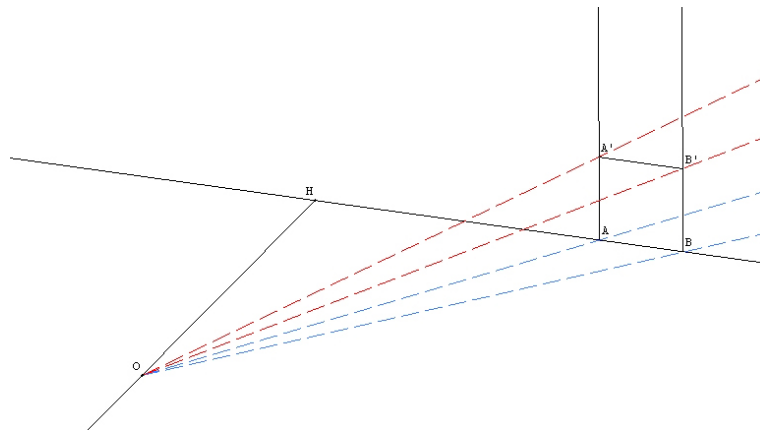
Le problème du joueur de rugby

Quelques éléments de solution

Juin 2006

Le problème

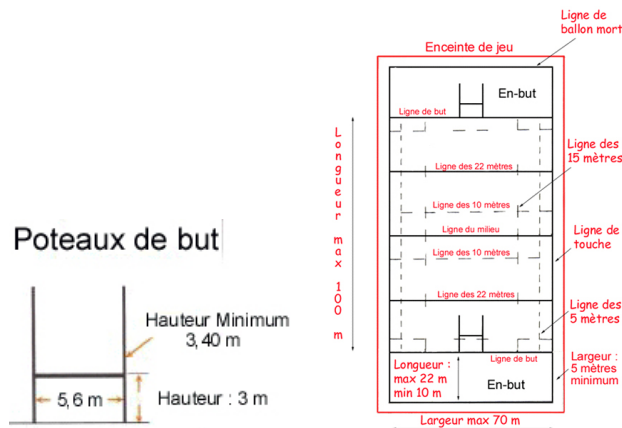
Quand un essai vient d'être marqué au rugby, l'équipe désigne un joueur pour tenter la transformation. Il s'agit, par un coup de pied de faire passer le ballon entre les poteaux, au dessus de la barre horizontale. Le ballon est posé, à une distance au choix du joueur, sur la perpendiculaire à la ligne d'essai. On supposera ici que l'essai a été marqué à l'extérieur des poteaux.



Le joueur qui tente la transformation essaye d'ouvrir au maximum l'angle de tir. A quelle distance de la ligne d'essai doit-il se placer ?

Quelques renseignements sur le terrain de rugby

Ces images proviennent du site : <http://www.francerugby.fr/>



Modélisation du problème plan

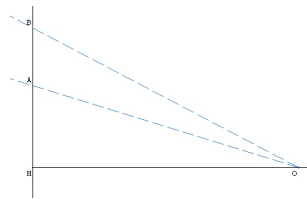
Dans un premier temps, on peut considérer le problème plan suivant :

Etant donné une droite D et A et B deux points de D tels que $AB = d$.

On note H un point de D et p la perpendiculaire à d passant par H .

On note $HA = a$ et $HO = x$.

Quelle est la valeur de x pour que l'angle $\widehat{AOB}$ soit le plus grand possible ?



Résolutions du problème plan

Deux approches peuvent être imaginées : une approche utilisant la trigonométrie du triangle rectangle et l'autre le produit scalaire. La première peut être envisagée dès la classe de seconde, pour peu, bien sûr, de résoudre graphiquement ou en valeur approchée en utilisant la calculatrice ou un grapheur. La seconde peut être utilisée en première scientifique et se généralise facilement au problème de l'espace qui pourra être abordé en classe de terminale S.

Méthode élémentaire

L'angle cherché est l'angle $\gamma = \widehat{BOA}$ qui apparaît comme la différence des angles $\beta = \widehat{BOH}$ et $\alpha = \widehat{AOH}$ puisque H est à l'extérieur du segment $[AB]$ et que, par raison de symétrie, on peut résoudre le problème pour $H \in [BA]$.

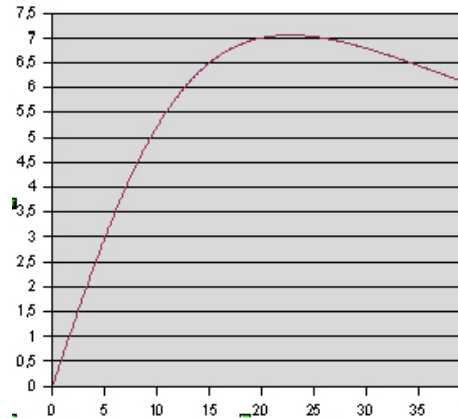
Mais dans le triangle rectangle BOH , $\tan(\beta) = \frac{a+d}{x}$ et $\tan(\alpha) = \frac{d}{x}$

Dans ces conditions,

$$\gamma = \text{atan}\left(\frac{a+d}{x}\right) - \text{atan}\left(\frac{d}{x}\right)$$

On peut approcher le résultat numérique en utilisant un tableur-grapheur ; ici, par exemple $a = 20m$:

x	β	α	$\beta - \alpha$
0,1	89,82	89,76	0,06
...	...	...	...
22,2	49,09	42,04	7,0564391344
22,3	48,97	41,91	7,0569672555
22,4	48,84	41,78	7,0573529076
22,5	48,71	41,65	7,0575979447
22,6	48,59	41,53	7,0577042051
22,7	48,46	41,4	7,0575076659
22,8	48,34	41,28	7,0575076659
22,9	48,21	41,15	7,0572084612
23	48,09	41,03	7,0567776694
23,1	47,96	40,91	7,0562170472



Avec le produit scalaire

On se place dans la repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i}$ vecteur normé directeur de la droite AB .

Dans ce repère :

$O(0,0)$, $A(a,x)$, $B(a+d,x)$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \cos(\gamma)$$

$$\cos(\gamma) = \frac{a(a+d) + x^2}{\sqrt{a^2 + x^2} \sqrt{(a+d)^2 + x^2}}$$

On considère alors la fonction f qui à x fait correspondre $\cos(\gamma)$

$$f'(x) = \frac{d^2 x (x^2 - a(a+d))}{D^2}$$

Le maximum est donc atteint pour $x = \sqrt{a(a+d)}$ et :

$$\gamma_{max} = \arccos \left(\frac{2a(a+d)}{(2a+d)\sqrt{a(a+d)}} \right)$$

Avec les mêmes valeurs ($a = 20m$ et $d = 5,6m$), on obtient :

$$x \approx 22.62741700 \text{ et } \gamma \approx 7^\circ 3' 14''$$

Modélisation du problème de l'espace

On se place dans le repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Dans ce repère en appelant h la hauteur de la barre :

$O(0, 0, 0)$, $A(a, x, 0)$, $A'(a, x, h)$, $B(a + d, x, 0)$ et $B'(a + d, x, h)$

On utilise la même méthode que précédemment :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= OA \times OB \cos(\gamma') \\ \cos(\gamma') &= \frac{a(a + d) + x^2 + h^2}{\sqrt{a^2 + x^2 + h^2} \sqrt{(a + d)^2 + x^2 + h^2}}\end{aligned}$$

On considère alors la fonction g qui à x fait correspondre $\cos(\gamma')$

$$g'(x) = \frac{d^2 x(x^2 - a(a + d) + h^2)}{D^2}$$

Le maximum est donc atteint pour $x = \sqrt{a(a + d) - h^2}$ et :

$$\gamma'_{max} = \arccos \left(\frac{2a(a + d)}{(2a + d)\sqrt{a(a + d)}} \right)$$

C'est donc la même valeur de l'angle maximum, mais qui est atteint à un autre endroit !

En utilisant les mêmes valeurs que précédemment et $h = 3m$, on obtient :

$$x = 22.42766149$$

