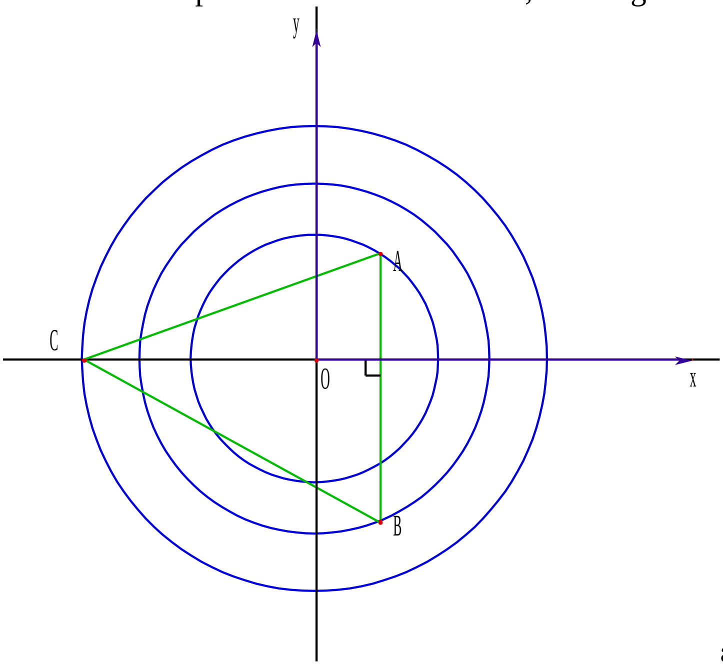
Retour

Etant donné trois cercles de même centre O, on cherche à construire un triangle d'orthocentre O dont les trois sommets appartiennent respectivement aux trois cercles.

Solution (d'après Gilles germain)

Existence du triangle :

Choisissons le point C sur un des cercles, le triangle est de la forme suivante :



avec (BO) perpendiculaire à (AC).

Dans le système d'axes choisi, l'abscisse commune de A et B vérifie l'équation
$2cx^3 + (a^2 + b^2 + c2\ )x^2 - a^2b^2 = 0$
où a, b, c sont les rayons des cercles.
On montre par une étude de fonction qu'il y a une solution unique.

Le triangle est-il consctructible à la règle et au compas ?

Avec le changement de variable X= ab/x, le problème devient
L'équation : $X^3 - (a^2 + b^2 + c^2)X - 2abc = 0$ admet-elle une solution constructible ?

Voici déjà de quoi consoler tous ceux qui se sont acharnés en vain à trouver une construction.

Pour a = 1, b = 2, c = 3, le problème n'a pas de solution constuctible à la règle et au compas

En effet l'équation $X^3 - 14X - 12 = 0$ n'a pas de solution rationnelle.
(On utilise ici le résultat de Wantzel : *si la solution est constructible, c'est un nombre algébrique sur Q*. Voir par exemple le livre de JC Carrega, *constructions à la règle et au compas, Ed Herman)*
Pour le montrer, il suffit de considérer quelles sont les solutions rationnelles possibles et de les tester.
Soit p/q une solution rationnelle, alors $p^3 - 14pq^2 - 12q^3 = 0$, donc p est pair.
On pose p=2p', ce qui donne $2p'^3 - 7p'q^2 - 3q^3 = 0$ (i)
Comme on a évidemment pris p et q premiers entre eux, il en est de même pour p' et q.
En écrivant (i) sous la forme $2p'^3 = (7p' + 3q)q^2$, on voit que q est un diviseur impair de 2 donc les valeurs possibles pour q sont 1 et -1.

En écrivant (i) sous la forme $3q^3 = (2p'^2 - 7q^2)p'$ on voit que p' est un diviseur de 3 donc les valeurs possibles pour p' sont 1 , -1, 3 , -3.

Mais on ne serait pas tout à fait satisfait sans un résultat général !!

Admettant le résultat de Hilbert :
a, b, c étant des nombres rationnels positifs,
l'équation : $X^3 - (a^2 + b^2 + c^2)X - 2abc = 0$ admet une solution constructible si et seulement si cette solution est rationnelle.

on peut prouver que

La solution est constructible si et seulement si Il existe e, f, g, h rationnels tels que $a = (e - f)(g + h)$, $b = (e + f)(g - h)$, $c = 4\sqrt{efgh} - (e - f)(g - h)$.

La racine rationnelle de l'équation est alors $(e + f)(g + h)$.

Preuve

L'équation : $X^3 - (a^2 + b^2 + c2)X - 2abc = 0$ est équivalente à $(cX + ab)^2 = (X^2 - a^2)(X^2 - b^2)$

On vérifie par le calcul que la condition donnée "marche".

Réciproquement, supposons une racine rationnelle u, on choisit alors deux rationnels v et w positifs tels que $4\,uvw = 1$.

On pose

$e = v(u + a)$

$f = v(u - a)$

$g = w(u + b)$

$h = w(u - b)$

et ça marche

Exemple :

Pour $a = 41$, $b = 69$, $c = 73$, on trouve 23 comme abscisse commune des points A et B.

Retour