

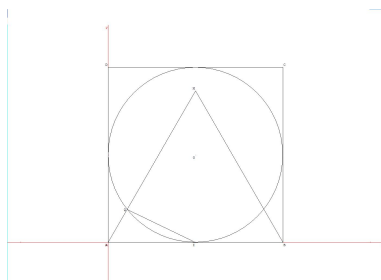
Etude par le calcul de la deuxième construction

7 Janvier 2007

1 Un calcul de distance

Soit un carré $ABCD$ de côté 2 et son cercle inscrit (donc de rayon 1)

Soit le triangle équilatéral construit sur un des côtés du carré, à l'intérieur du carré, par exemple ABM . Soit I le milieu de ce côté. Le cercle coupe le triangle équilatéral en Q et P ; $[QI]$ est un côté (approché) de l'heptagone inscrit dans le cercle.



Q est l'intersection de la droite (AM) d'équation $y = \sqrt{3}x$ et du cercle inscrit d'équation $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. En résolvant le système on trouve :

$$Q \left(1/4 + 1/4 \sqrt{3} - 1/4 \sqrt{2} \sqrt[4]{3}, \left(1/4 + 1/4 \sqrt{3} - 1/4 \sqrt{2} \sqrt[4]{3} \right) \sqrt{3} \right)$$

et la distance QI vaut :

$$QI = \sqrt{\left(-3/4 + 1/4 \sqrt{3} - 1/4 \sqrt{2} \sqrt[4]{3} \right)^2 + 3 \left(1/4 + 1/4 \sqrt{3} - 1/4 \sqrt{2} \sqrt[4]{3} \right)^2} \approx .8684299085$$

Une valeur approchée du côté de l'heptagone est :

$$2 \sin \left(\frac{\pi}{7} \right) \approx .8677674786$$

2 Une solution avec les complexes

Plaçons nous dans un repère centré au centre du carré et dont les axes sont perpendiculaires aux côtés. Supposons en outre que le côté du carré mesure 2.

Les affixes des points :

$$A : -1 - i = e^{\frac{5i\pi}{4}}$$

$$B : 1 - i = e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

$$M : (\sqrt{3} - 1)i = (\sqrt{3} - 1) e^{\frac{i\pi}{2}}$$

La construction est exacte ssi P coïncide avec l'image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{7}$ du milieu de $[AB]$ d'affixe $-i$ dont l'affixe z_I est égale à :

$$z_I = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - i \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$$

Le calcul de la partie imaginaire de $\frac{m-b}{m-z_I}$ donne :

$$\frac{\sin(2/7\pi)\sqrt{3} - \cos(2/7\pi) - \sqrt{3} + 1}{(\sin(2/7\pi))^2 + (\cos(2/7\pi))^2 + 2\cos(2/7\pi)\sqrt{3} - 2\cos(2/7\pi) + 4 - 2\sqrt{3}} \approx -.5589621428 \times 10^{-3}$$

Cette valeur approchée n'est pas importante en soi, l'essentiel est qu'il s'agit clairement d'un résultat non nul, en particulier n'est pas nul. Les points M , P et B ne sont pas alignés et la construction n'est pas exacte !