Quel est le nombre minimal de multiplications pour calculer x^n dans chaque cas suivant :

n	15	16	23	33	53
min(n)	5	4	6	6	8

Explications (Inspiré de Donald Knuth The Art of Computer Programming)

Il y a deux méthodes classiques (on suppose qu'on peut garder en mémoire les résultats intermédiaires obtenus et donc les réutiliser sans les recalculer).

La méthode binaire :

Ecrivez n en base 2, puis remplacez dans l'écriture trouvée chaque 1 par SX, chaque 0 par S. Supprimez le SX qui apparaît à gauche.
Interprétez l'écriture obtenue comme le moyen de calculer x^n : S désigne la mise au carré et X la multiplication par x.
Par exemple 15 = 1111 en binaire donne ~~SX~~SXSXSX ce qui s'interprète (à condition de commencer par la droite) comme :
$x^{15} = X(S(X(S(X(S(x))))))$ soit $x * (x * (x * x^2)^2)^2$
Donc pour 15, la méthode binaire nécessite 6 multiplications b(15) = 6.
Remarque : avec cette méthode, on n'a besoin de mettre en mémoire que x et le résultat courant.

La méthode de factorisation

Elle consiste à utiliser une factorisation de n : n = p q où p est le plus petit facteur premier de n et q > 1. On calcule d'abord x^p qu'on élève ensuite à la puissance q.
Par exemple, pour x^{15} on calcule x^3 en deux multiplications, puis on élève x^3 à la puissance 5 en trois multiplications, $y^5 = y * (y^2)^2$
Donc, par la méthode de factorisation, on calcule x^{15} en 5 multiplications : f(15) = 5.

Les exemples proposés

- Pour 16 la méthode binaire est la meilleure : $(((x^2)^2)^2)^2$
- Pour 15, la méthode binaire nécessite 6 multiplications b(15) = 6, alors que par la méthode de factorisation, on calcule x^{15} en 5 multiplications .
- 23 est le plus petit exemple où la meilleure méthode n'est ni la méthode binaire, ni la méthode par factorisation : b(23) = 7, f(23) = 1 + b(22) = 7
  tandis qu'on peut calculer x^{23} en 6 multiplications : on calcule x^3 en deux multiplications : $x^2 * x$ puis x^5 en une multiplication supplémentaire $x^3 * x^2$ et x^{10} comme carré de x^5 et enfin $x^{23} = (x^{10} * x^3) * x^{10}$
- Pour 33 la méthode binaire est la meilleure b(33) = 6, f(33) = 7
- Pour 55 la méthode par factorisation est la meilleure b(55) =9 , f(55) = 8