<u>Calcul mental et critères de divisibilité</u>

B. Anselmo pour le groupe collège

L'activité décrite ici a été expérimentée dans le cadre l'IREM de Lyon, pour une brochure à paraître sur sur le calcul mental au collège

Les critères de divisibilité sont un aspect de la culture des nombres qui s'enrichit au collège dès la classe de 6ème. Souvent, ces critères sont apportés par l'enseignant et le travail se limite à des exercices d'application. Pourtant, dans les problèmes où interviennent des décompositions de nombres en facteurs, ils sont efficaces à la fois pour initier des stratégies de résolution et pour les rendre plus rapides.

En calcul mental, la rapidité est un enjeu, les stratégies utilisant les critères de divisibilité sont un outil performant et peuvent être mises en valeur.

L'activité a été testée en 6ème mais peut être reprise en classe de cinquième.

<u>Le compte est bon</u>

<u>Phase1 : Familiarisation avec des multiples de 2 ; 5 ; 10</u>

<u>Objectifs</u> : Montrer qu'il existe plusieurs décompositions multiplicatives d'un nombre ; montrer que certaines stratégies sont plus rapides pour obtenir une décomposition (en particulier celles s'appuyant sur le repérage du dernier chiffre).

<u>Matériel</u> : tableau, feuille ou ardoise.

<u>Pré requis</u> : Connaître les tables de multiplication. Savoir qu'on peut calculer un produit de plus de deux facteurs en associant les facteurs de différentes manières.

<u>Description</u> :

Sur le principe du jeu le compte et bon, le professeur propose de retrouver des nombres en formant un produit à partir des facteurs écrits sur les étiquettes suivantes :

1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9

Le professeur donne la consigne : *« On va jouer au compte est bon avec les étiquettes suivantes, que vous ne pourrez utiliser qu'une fois, mais attention vous ne pouvez faire que des multiplications. Vous pouvez écrire des résultats intermédiaires sur votre feuille mais vous n'avez pas le droit de poser d'opération.»*

Il s’assure que tous les élèves ont compris la consigne en proposant éventuellement un exemple.
Les élèves jouent successivement avec les nombres : 60 ; 240 ; 560 ; 105.

A chaque fois, après qu’environ la moitié de la classe a abouti à un résultat, le professeur recense les propositions, les soumet à la validation de la classe. Le professeur revient sur les démarches correctes en questionnant les élèves producteurs sur ce qui les a orientées : « Comment as-tu su quels nombres choisir ? », « Qu’est-ce qui t’a donné l’idée de ces nombres ? »…

Analyse :

Dans les premiers calculs, beaucoup d’élèves n’aboutissent pas, d’autres ne s’approprient pas la consigne ou ont des difficultés à enchaîner les produits et utilisent d’autres opérations que la multiplication.

Même si certains élèves connaissent déjà les critères de divisibilité par 2, par 5 et par 10, ils ne les utilisent pas toujours spontanément. La démarche la plus fréquente au début reste celles des essais / erreurs.

Au fur et à mesure, les procédures évoluent : certains reconnaissent dans le nombre des résultats des tables, d’autres travaillent à partir de la recherche de moitié, de quarts… avant que petit à petit le repérage du dernier chiffre apparaisse comme un outil efficace.

On peut se poser la question de la présence du 1 parmi les nombres donnés au départ. Après quelques parties, les élèves font remarquer soit qu'on ne se sert jamais du 1, soit qu'on peut écrire « fois 1 » dans toutes les décompositions. C'est l'occasion de travailler en acte la notion d'élément neutre pour la multiplication.

La traduction des démarches des élèves par le professeur peut prêter à débat en particulier quand l’enseignant traduit la démarche par une seule expression. Certains élèves ne reconnaissent pas ce qu’ils ont fait alors que d’autres donnent raison au professeur. C’est l’occasion de travailler le passage délicat de l’oral à l’écrit et de donner du sens aux expressions comportant un produit de plusieurs facteurs (avec utilisation ou non de parenthèses).

Institutionnalisation

- **Il y a plusieurs chaînes de multiplications qui donnent le même résultat.**
- **Des chaines de multiplications qui comportent les mêmes nombres écrits dans un ordre différent donnent toujours le même résultat**
- **Pour former un produit qui se termine par 0, on a intérêt à associer les facteurs 2 et 5 dont le produit est 10.**

Phase2 : Evolution des procédures

Objectif : montrer qu'on peut déterminer à l'avance la divisibilité d'un nombre par 10, 2, 5, 3 ou 9.

Matériel : le même que dans la phase précédente

Prérequis : Avoir déjà rencontré dans sa scolarité des critères de divisibilité.

Description :

Le professeur donne la consigne : *« On va jouer au compte est bon avec les étiquettes 2 ; 2 ; 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 7 ; 9 ; 13 comme la dernière fois, vous ne pourrez utiliser qu'une fois chacune d'elles et vous ne pouvez faire que des multiplications. Vous êtes autorisés à écrire des résultats intermédiaires sur votre feuille mais vous n'avez pas le droit de poser d'opération.»*

Les élèves jouent cette fois ci avec des nombres comme : 108 ; 135 ; 117 ; 441, 104

Une mise en commun des procédures est organisée après chaque recherche, elle porte sur les démarches abouties ou non, sur leur validation et surtout sur ce qui a permis ou non de les initier. Le professeur note et garde au tableau les affirmations d'élèves du type « j'ai vu que le nombre se terminait par 5, alors c'est 5 fois quelque chose... »

Analyse :

Les nombres sont choisis pour permettre de faire émerger certains critères de divisibilité mais en invalider d'autres :

- Dans 108 (9×2×2×3), la plupart des élèves reconnait d'abord un multiple de 2, mais certains reconnaissent déjà un multiple de 9.
- Dans 135 (5×3×9), certains reconnaissent le multiple de 9, d'autres reconnaissent un multiple de 5, ils peuvent se construire un théorème élève « le dernier chiffre est un diviseur du nombre ».
- Avec 117 (9×13), le théorème précédent est invalidé. Si certains élèves parviennent au résultat par essais/erreurs, d'autres reconnaissent tout de suite un multiple de 9.
- Avec 441 (9×7×7) les procédures par essais successifs ont peu de chances d'aboutir, le recours au critère de divisibilité par 9 est un moyen efficace pour orienter la recherche.
- 104 (2×2×2×13) permet d'infirmer le théorème élève « la somme des chiffres d'un nombre est un diviseur de ce nombre »

Les élèves ont besoin de plus ou moins de temps pour s'approprier une procédure de recherche : on peut découper l'activité en plusieurs séances espacées dans le temps et proposer de ne chercher qu'un ou deux nombres à chaque fois.

Lors de la correction, on peut écrire toutes les propositions des élèves au tableau. Cela permet de faire apparaître différentes décompositions, la commutativité et l'associativité de la multiplication. Par exemple, si un élève propose $9 \times 2 \times 3 \times 2$, et un autre $2 \times 3 \times 9 \times 2$, ce n'est pas immédiatement « la même chose » pour eux. Il faut mettre en évidence qu'on a utilisé les mêmes nombres dans la liste et que l'ordre dans lequel les multiplications sont effectuées ne modifie pas le résultat

La plupart des élèves commence par des essais successifs. Les critères de divisibilité n'apparaissent pas toujours spontanément. Dans ce cas là, après la validation des bonnes propositions, l'enseignant doit solliciter la classe et demander si une partie au moins de la décomposition n'était pas prévisible.

Institutionnalisation :

Quand certains critères de divisibilité ont été cités, et quand élèves en expriment le besoin, les critères de divisibilité sont écrits dans la partie calcul mental du cahier.

On peut écrire des phrases de la forme :

- **Un entier est multiple de 5 et s'écrire 5 × …**
  quand son dernier chiffre est un 5 ou un 0.
  On dit alors qu'il est divisible par 5.
- **Un entier est multiple de 9 et s'écrire 9 × …. ,**
  quand la somme de ses chiffres est multiple de 9.
  On dit alors qu'il est divisible par 9.

Prolongement:

Une fois que le principe du jeu est acquis et que la classe possède quelques méthodes de résolution efficaces, il est intéressant de le proposer régulièrement tout au long de l'année pour réinvestir et entraîner les critères.

Ce jeu est très apprécié des élèves qui cherchent à être les premiers à trouver. Pour laisser à tous un temps de recherche suffisant et éviter le découragement des moins rapides, on peut proposer aux élèves qui ont trouvé une première solution, soit d'en chercher un maximum d'autres, soit de trouver la plus économique, c'est-à-dire celle qui utilise le moins de nombres parmi ceux qui sont proposés.

Lors de la mise en commun, même les élèves n'ayant pas trouvé de solution peuvent essayer d'en apporter des « nouvelles » en décomposant 4 en 2×2 par exemple.