

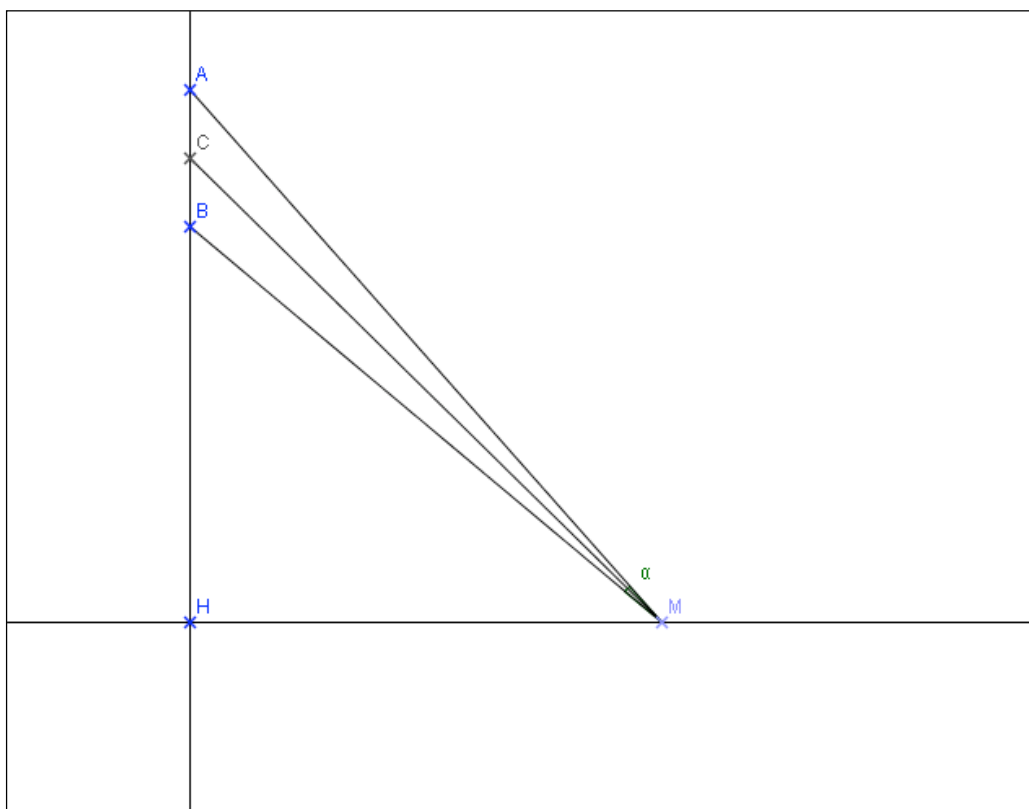
Séance sur la transformation des essais au rugby.

Damien Rivollier

La séance décrite ici a été réalisée en salle informatique, sur Cabri, dans la classe de Première S 1 à la Cité Scolaire Internationale de Lyon (19 élèves). Elle avait pour objectifs :

- la reprise en main du logiciel Cabri,
- la modélisation d'un problème concret, amenant à un problème d'optimisation,
- la formulation et la mise à l'épreuve de conjectures,
- l'application de connaissances sur le chapitre sur les angles.

La séance débute par l'exposé du problème, et des hypothèses de modélisation ; les élèves ne sont pas encore devant les ordinateurs. Il s'agit de traiter du problème plan de la transformation d'un essai au rugby : un essai est marqué au point H, la droite (AB) étant la ligne d'essai. La règle stipule qu'un joueur doit tenter de transformer l'essai pour marquer des points supplémentaires; pour cela, le ballon doit être posé sur la perpendiculaire à (AB) en H, puis par un coup de pied, être envoyé entre les poteaux symbolisés par les points A et B. On donne $BH=16,2\text{m}$ et $AB=5,6\text{m}$ (la figure sera faite à l'échelle $1/200^{\text{ème}}$). On suppose aussi que le buteur n'a pas de problème de puissance. Ce sont les élèves qui, après un bref débat, concluent qu'il faut maximiser l'angle α pour que la transformation ait le plus de chances de réussir.



Les élèves réalisent la figure sous Cabri, affichent la valeur de l'angle, et en observent l'évolution quand le point M se déplace. La séance étant la première où les élèves manipulent Cabri cette année, cette phase prend quelques minutes (une dizaine). Tous observent qu'il

existe une position optimale. Je les invite à caractériser cette position optimale. Pour les aider, je leur demande de placer le point C, milieu du segment $[AB]$, prétendant que dans les écoles de rugby on apprend à viser le « poteau du milieu ».

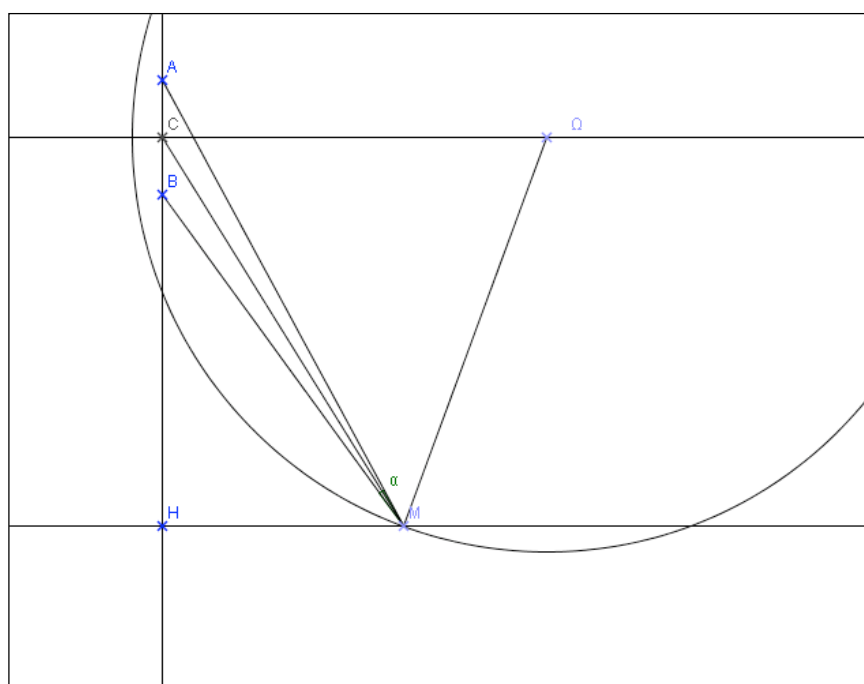
Beaucoup d'élèves formulent la conjecture suivante : *La position idéale pour le point M correspond au cas où le triangle CHM est rectangle isocèle.* Avec la précision des mesures que donne Cabri, cette conjecture (qui s'avérera être fausse) semble être vraie. En effet, il existe une zone proche de la zone optimale où en fait, l'angle α varie très peu. Si on place le point M tel que $HM=CH$, la valeur de l'angle affichée par Cabri semble être maximale.

Je demande alors s'ils peuvent me démontrer leur conjecture. Beaucoup ne voient pas comment démarrer; un très bon élève prétend avoir une preuve : il a calculé que

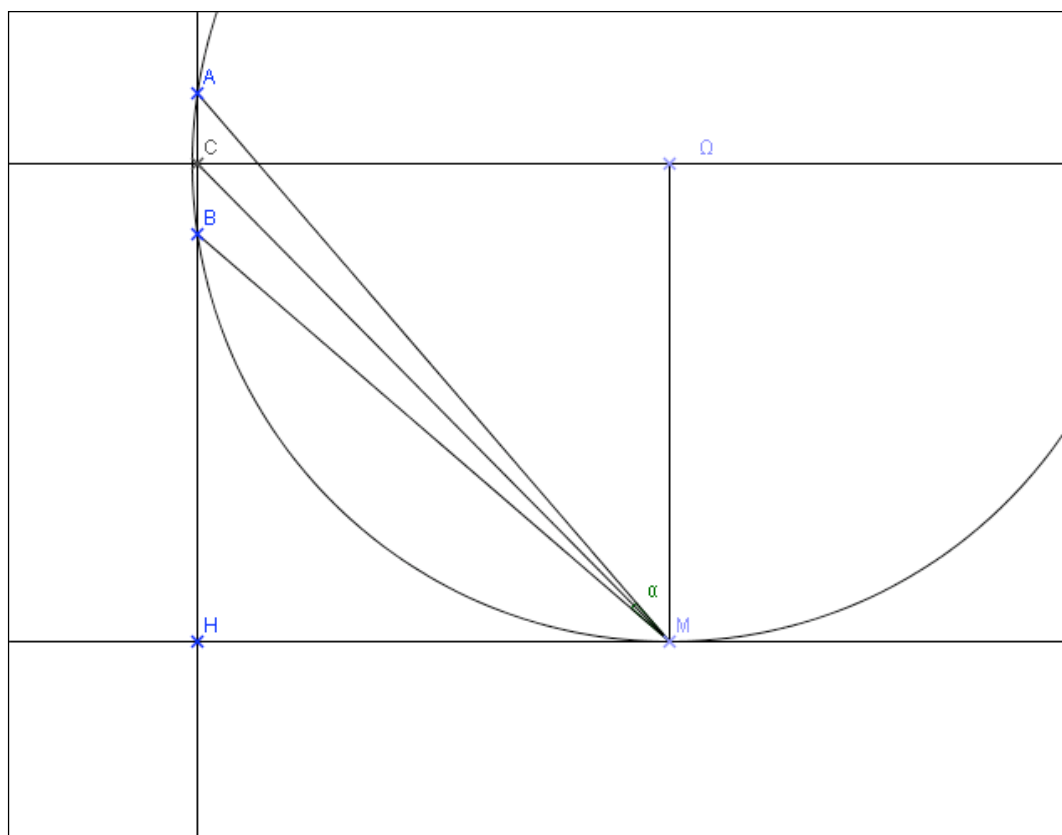
et tracé cette fonction qui dépend de HM avec sa calculatrice.

Il me montre la courbe obtenue, qui possède une portion relativement plate. Il affirme ensuite que la valeur de $HM=CH$ est le maximum, ce qui prouve la conjecture. Je lui rétorque qu'il ne sait pas (encore) étudier la fonction $\tan^{-1}$, et que, par conséquent, son argument, qui certes vient étayer la conjecture, ne parvient pas à la prouver. De plus la platitude de la fonction au voisinage de la distance optimale pose problème, mais nous y reviendrons dans la suite.

Je propose alors aux élèves, pour les mettre sur une piste de justification, de tracer le cercle circonscrit au triangle ABM, et de formuler une nouvelle conjecture sur la position optimale du point M à propos de ce cercle. Après avoir construit la figure et effacé les traits de construction, ils obtiennent une figure ressemblant à celle-ci :



La conjecture qu'ils formulent est la même pour tous : *la position optimale de M correspond au cas où le cercle est tangent à la perpendiculaire à (AB) passant par H, c'est-à-dire que la droite (ΩM) est parallèle à (AB) .* Note pour le lecteur : Cette conjecture est la bonne, pour l'instant les élèves ne le savent pas.



Je leur demande alors si les deux conjectures qu'ils ont formulées sont équivalentes. Cabri semble leur dire que oui. Certains prétendent pouvoir le démontrer, l'angle droit en M qui caractérise la tangence du cercle montrant selon eux que $C\Omega MH$ est un carré.

A ce stade, j'ordonne aux élèves de quitter leurs écrans pour discuter de cette question. Un élève corrige ce qui a été dit, l'angle droit en M nous dit seulement que $C\Omega MH$ est un rectangle. Je demande alors quelles sont la longueur et la largeur de ce rectangle. Un côté $M\Omega$ est égal au rayon du cercle. Je les questionne pour savoir si $C\Omega$ est aussi égal au rayon du cercle. Après un petit moment de flottement (lié au fait qu'ils essaient de montrer que la réponse est oui), un élève dit que le rayon vaut $A\Omega$ ou $B\Omega$, mais pas $C\Omega$. La classe entière s'en convainc en voyant que C se trouve sur la corde $[AB]$, et que donc $C\Omega$ est plus petit que le rayon du cercle. Les deux conjectures ne sont donc pas équivalentes. Je leur montre que le fait que $C\Omega$ soit 'presque' sur le cercle explique qu'ils aient pu croire que $C\Omega MH$ était un carré, c'est-à-dire que CMH était rectangle isocèle.

Il faut alors décider quelle est la bonne conjecture. On pourrait imaginer plusieurs stratégies pour faire en sorte que les élèves tranchent : par exemple, revenir sur l'idée qu'a eue

celui qui a tracé avec sa calculatrice la fonction

puis leur faire

affiner leur conjecture, en faisant les zooms pertinents sur les écrans de leurs calculatrices pour voir très précisément où est le maximum. On peut également constater notre échec à démontrer la première conjecture, et les inciter à essayer de démontrer la seconde. Si on y

parvient, on aura alors validé la seconde conjecture, et par là-même invalidé la première qui ne lui était pas équivalente.

Car la bonne conjecture est celle qui concerne la tangence entre le cercle circonscrit à ABM et la perpendiculaire à (AB) passant par H. Les 50 minutes de la séquence étant écoulées, j'affirme que la deuxième conjecture est bel et bien la bonne et propose à la classe qu'on la démontre au cours de la séquence prochaine.

La démonstration n'est pas évidente. Je leur ai donc donné, sous forme de questions intermédiaires, les trois étapes de la preuve :

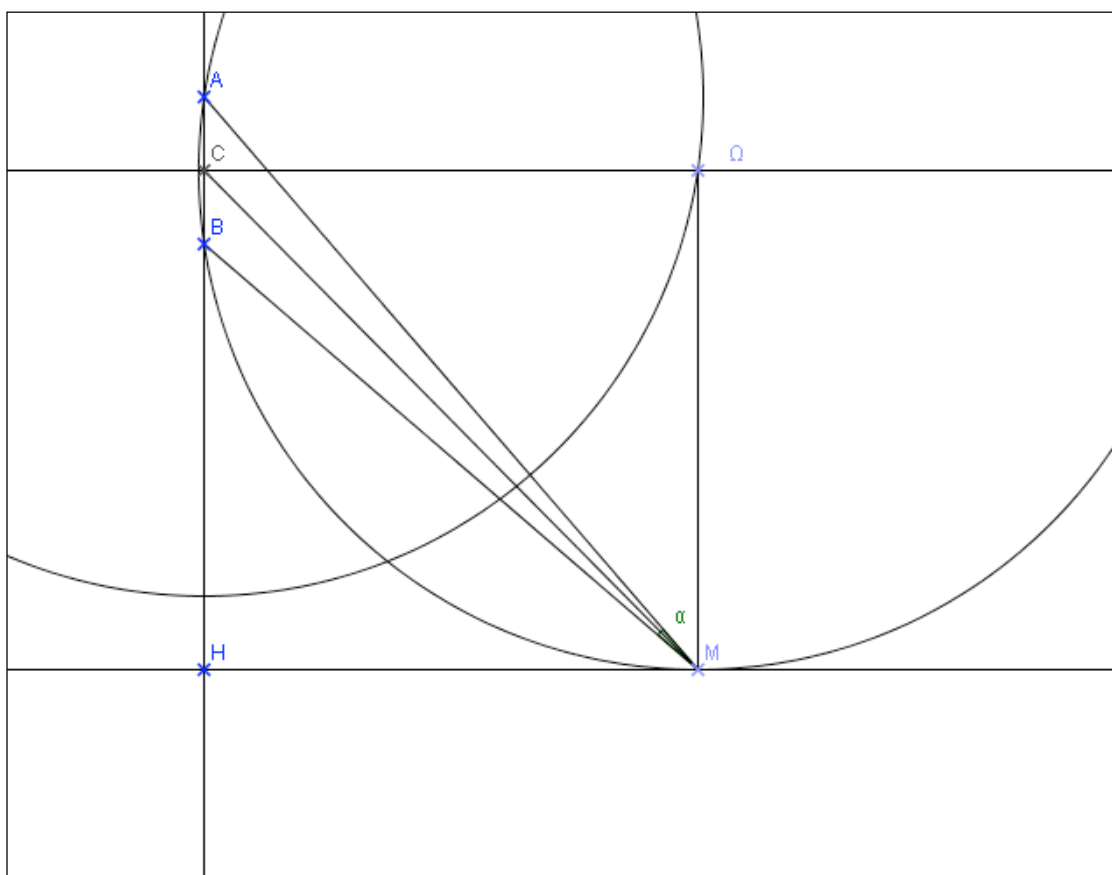
- Tout d'abord, il s'agit de montrer que (par le théorème de l'angle au centre revu récemment dans le chapitre sur les angles). Ainsi, ou r est le rayon du cercle circonscrit à ABM.
- Ensuite, on voit que pour que α soit maximal, comme α est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, α sera maximal quand $\sin(\alpha)$ sera maximal. Il faut donc que le rayon du cercle r soit le plus petit possible.
- Enfin, on a une contrainte sur r : en effet, on a $r = M\Omega$. De plus, Ω est sur la médiatrice de [AB], c'est-à-dire sur la perpendiculaire à (AB) passant par C. Par ailleurs, M est, par hypothèse, sur la perpendiculaire à (AB) passant par H. M et Ω peuvent donc a priori se déplacer sur deux droites fixes. La distance r est donc au moins égale à la distance entre ces deux droites, qui sont parallèles. La distance ΩM vaut exactement la distance entre ces deux droites quand (ΩM) est perpendiculaire à (MH), c'est-à-dire quand le cercle circonscrit à ABM est tangent à la perpendiculaire à (AB) passant par H. Cette question a posé problème à la classe, et une mise au point a été nécessaire sur le fait que la distance entre deux points pouvant se déplacer sur deux droites parallèles est au moins égale à la « distance » entre les deux droites. Par contre, cela paraissait évident aux élèves que la distance était minimale quand les deux points étaient sur une perpendiculaire aux deux droites. Il ne restait plus alors qu'à relier la perpendicularité des droites (HM) et (ΩM) à la définition de la tangence à un cercle pour achever la démonstration de la conjecture.

En tout, l'activité a duré 1h15.

Pour la fois suivante, j'ai demandé aux élèves de faire une application numérique, puis de donner à partir de la démonstration un programme de tracé du point optimal M :

- Tracer la médiatrice de [AB]
- Tracer le cercle de centre A et de rayon CH, il coupe la médiatrice à [AB] en Ω ; ainsi, on aura $\Omega A = CH$.
- Soit d la perpendiculaire à (AB) passant par H. Tracer la perpendiculaire à d passant par Ω . Elle coupe d en le point M optimal, qui s'avère être le point de tangence entre le cercle de centre Ω et de rayon ΩA et la droite d.

La correction du programme de tracé sera faite rapidement à la séance suivante.



Ainsi, hormis le travail sur les angles et sur la modélisation d'un problème concret aboutissant à un problème d'optimisation, ce problème présente un intérêt vis-à-vis du lien entre Cabri et la conjecture. En effet, il n'est pas rare que Cabri nous donne à voir des propriétés invariantes par déformation de la figure, ou nous dessine un lieu géométrique. Les possibilités du logiciel sont tellement grandes qu'il est difficile de justifier auprès de nos élèves le caractère encore hypothétique d'une « conjecture » obtenue grâce à Cabri. Or, ici, Cabri, en raison de problèmes de précision sur les mesures d'angle, nous fait d'abord émettre une conjecture fausse. Puis il nous permet d'en formuler une autre, qui est différente de la première. Il est alors nécessaire d'utiliser soit l'outil fonctionnel et la calculatrice avec suffisamment de précision, ou d'entrer dans la démonstration du résultat, pour décider quelle est la solution de notre problème. Le caractère prospectif du logiciel a donc ici été bien mis en évidence.